
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 23. August 2011, 12 Uhr in die DS Briefkästen

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf mathematischen Schulstoff. Insbesondere wird die Durcharbeitung des Arbeitsblattes 1 vorausgesetzt. Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Welche der folgenden Begriffe bedeuten einen Ausdruck für arithmetische Operationen: Quotient, Multiplikation, Wert des Produkts, Faktor, Teiler, Dividend, Bruch?
2. Welches ist der erste Summand der Summe $(a + b) + c$?
3. Welche der vier folgenden Zeichenreihen bezeichnen einen arithmetischen Ausdruck:
 $2 + a$, $1 + 2a$, $(-12) + a$, $1 - 2 + a$?
4. Wie viele verschiedene Auswertungsvorschriften kann man durch geeignete Klammersetzung in der Zeichenreihe $2 + 3 \cdot 4 + 5$ erhalten? Begründung durch Auflistung mit entsprechender Auswertung der Ausdrücke!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen:

1. $0 \neq 1$.
2. Für alle ganzen Zahlen a und b folgt aus $a \cdot b = 0$ entweder $a = 0$ oder $b = 0$ oder beides.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Geben Sie alle ganzen Zahlen an, die Teiler der Zahl -10 sind.
2. Begründen Sie die folgende Aussage für ganze Zahlen b, c, d und Primzahlen a :
Falls a Teiler von $b \cdot (c \cdot d)$ ist, dann ist a Teiler von b oder Teiler von c oder Teiler von d .

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine ganze Zahl x heißt *gerade* bzw. *ungerade*, falls es eine ganze Zahl k gibt, so dass $x = 2k$ bzw. $x = 2k+1$ gilt.

1. Widerlegen Sie:

Falls x und y gerade sind, dann gibt es stets eine ganze Zahl k , so dass $x = 2k$ und $y = 2k$ gelten. (Wie müsste die Aussage korrigiert werden?)

2. Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen:

Falls x gerade ist und y ungerade ist, dann gilt $x \neq y$.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Wir wissen, wie man aus einer natürlichen Zahl n die nächste natürliche Zahl $n+1$ gewinnt. Damit besitzen wir das Bildungsgesetz der generativen Aufschreibung $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ unserer ersten unendlichen Menge. Sie wird als ungeordnete Zusammenfassung der Gesamtheit der natürlichen Zahlen zu einer Menge \mathbb{N} konstruiert. Davon ausgehend konstruiert man dann die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen und die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Diese Mengen können wir nun als Universum oder Grundmenge benützen.

1. Vergleichen Sie die durch die Aufschreibungen $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 7, 5, 3\}$, $\{1, 3, 5, 7, 5, 3, 1\}$, $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $\{1 + 2n; n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{1 + |2n|; n \in \mathbb{Z}\}$ definierten Mengen. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!
2. Wir betrachten die Mengen $\{(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$, $\{|-1|^n; n \in \mathbb{N}\}$, $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$, $\{-1, 1\}$. Welche dieser Mengen sind paarweise gleich, ungleich? Begründung!
3. Wir betrachten hierarchische Mengen- und Tupelstrukturen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Elemente bzw. Komponenten besitzen jeweils die Objekte $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$, $(1, 1, 1, \dots, 1^n)$, $\{1, 1, 1, \dots, 1^n\}$, $\{(1, 1), (1, 1)\}$, $(\{1, 1\}, \{1, 1\})$?
4. Eine intensionale Beschreibung $M = \{x \in U; P(x)\}$ gibt an, welche Eigenschaft P ein Element x eines Universums U haben muss, um in M enthalten zu sein. Geben Sie eine intensionale Beschreibung an für die Mengen $\{(-1)^n; n \in \mathbb{N}\}$ und $\{1+2n; n \in \mathbb{N}_0\}$!

Vorbereitung 2

Ausgehend von bereits gebildeten Mengen kann man weitere Mengen gewinnen z. B. durch die Operationen Vereinigung \cup , Durchschnitt \cap , Differenz \setminus , symmetrische Differenz $\Delta(\cdot, \cdot)$, Komplement $\overline{(\cdot)}$.

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Beschreiben Sie A als Durchschnitt 5-elementiger Mengen, als Vereinigung 3-elementiger Mengen, als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Mengen, als Komplement einer Menge, als symmetrische Differenz von zwei verschiedenen Mengen!

Listen Sie alle Teilmengen von A auf und erfinden Sie eine sinnvolle Sortierung für Ihre Liste!

Für beliebige Mengen A und B kann man obige Operationen in beliebiger Auswahl und beliebig oft auf die jeweiligen Ergebnisse anwenden. Dann aber stellt sich die Frage, wie viele Mengen man auf diese Weise höchstens erhalten kann. Tatsächlich kann diese Frage durch ein Venn-Diagramm entschieden werden.

2. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und dem umfassenden Universum $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Wie viele verschiedene Mengen können

innerhalb dieses Diagramms definiert werden? Geben Sie jeweils an, durch welche Operationsanwendungen diese Mengen aus A und B gewonnen werden können.

Vorbereitung 3

Wir fassen die Buchstaben a , b und c zu einer Menge Σ zusammen.

1. Listen Sie alle 2-Tupel (x, y) (Wörter der Länge 2) auf, wobei x und y Buchstaben aus Σ bedeuten. Notieren Sie dabei Tupel als Wörter.
2. Man sagt, dass Σ ein Alphabet ist mit der natürlichen Ordnung der Zeichen (a kommt vor b , und b kommt vor c , und insgesamt kommt a auch vor c).
Wie viele Buchstaben-3-Tupel (x_1, x_2, x_3) (Wörter der Länge 3) über Σ gibt es, so dass x_2 nicht vor x_1 kommt und x_3 weder vor x_2 noch vor x_1 kommt? Begründung!
3. Gibt es über Σ eine reflexive Relation R der Kardinalität 1? Begründung!
4. Sei $S = \{(ab, bc), (bc, ca)\}$. Geben Sie Bild und Urbild des Relationenprodukts $S \circ S$ an!

Vorbereitung 4

1. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die natürliche \leq -Ordnung der Zahlen $[6]$.
Wie ergibt sich die \leq -Ordnung auf $[6]$ aus dem entsprechenden Hasse-Diagramm?
2. Wir entfernen das Paar $(3, 4)$ aus der Relation \leq auf \mathbb{N} . Ist dann die resultierende Relation noch transitiv? Begründung!
3. Für welche Mengen M ist die Inklusionsrelation \subseteq auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine totale Ordnung? Begründung!

Vorbereitung 5

1. Gibt es eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$? Begründung!
2. Gibt es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$? Begründung!
3. Gilt für $f : X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$ stets $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$? Begründung!

Tutoraufgabe 1

- Wir definieren intensional $A = \{x \in \mathbb{N} ; 2 \text{ und } 3 \text{ sind nicht Teiler von } x\}$.
 - Die aufzählende (extensionale) Beschreibung $B = \{1, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ einer Menge B legt ein vernünftiges aufzählendes Bildungsgesetz nahe. Welches?
 - Wir betrachten $C = \{1 + \sum_{i=1}^n (3 - (-1)^i) ; n \in \mathbb{N}_0\}$.
Zeigen Sie die Mengengleichheit $A = C$!
- Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{(\sqrt{-1})^n ; n \in \mathbb{N}\})$?

Tutoraufgabe 2

Sei U eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge X von U sei $\overline{X} = U \setminus X$ das sogenannte Komplement von X bezüglich U .

- Geben Sie ein Beispiel für $A, B \subseteq U$ an, so dass die Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ nicht gilt. Für welche Mengen A, B gilt die Gleichung?
Um die DeMorgansche Gleichung $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ für beliebige Mengen A und B nachzuweisen, reicht es, die Gleichung im Venn-Diagramm der Vorbereitungsaufgabe 2.2 zu verifizieren. Begründung!
- Um die allgemeine Gültigkeit von Mengengleichungen in 3 Variablen A, B, C zu beweisen oder zu widerlegen, reicht es, dies in einem Venn-Diagramm für die Mengen $A = \{a, ab, ac, abc\}$, $B = \{b, ab, bc, abc\}$, $C = \{c, bc, ac, abc\}$ über dem Universum $U = \{a, b, c, ab, ac, bc, abc, d\}$ zu tun.
Widerlegen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$!
Beweisen Sie die Gleichung $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$!
- Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A_i \subseteq U$ für alle $i \in [n]$. Zeigen Sie für $n = 3$ die Gleichung

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

Wie kann man den Beweis dieser Gleichung für $n = 4$ zurückführen auf den Beweis der Gleichung für $n = 3$? Wie kann man diesen Schritt verallgemeinern?

Tutoraufgabe 3

Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1, R_2 und R_3 , die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften besitzen.

- R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,
- R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv,
- die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch,
- R_3 ist die transitive Hülle von R_1 .

Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung!

In welcher Weise wird das Urbild von R_3 partitioniert?

Tutoraufgabe 4

Sei R eine binäre Relation.

1. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ transitiv ist!
2. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $R = \{(x, y) ; y = x + 5\}$. Geben Sie R^* an!
3. Sei $M = [3]$. Bestimmen Sie alle partiellen Ordnungen R über M . Zeichnen Sie jeweils ein Hasse-Diagramm der Relationen und geben Sie an, welche der aufgelisteten Relationen total sind.

Tutoraufgabe 5

1. Finden Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, A_1, A_2 mit $A_1, A_2 \subseteq X$ und eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so dass $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$ gilt.
2. Ist die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründung!
3. Zeigen Sie, dass für die Komposition \circ zweier Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gilt: Ist $g \circ f$ bijektiv (auf C), dann ist f injektiv und g surjektiv (auf C).