

---

## Diskrete Strukturen

---

Abgabetermin: 30. August 2011, 12 Uhr in die DS Briefkästen

### Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Begründen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 formulierten Eigenschaften (*Gesetze*) von ganzen Zahlen.

1. Sei  $x \in \mathbb{N}$ , d. h. eine positive ganze Zahl, und  $y = x + 10$ . Dann sind die Zahlen 3 und 20 keine gemeinsamen Teiler von  $x$  und  $y$ .
2. Bestimmen Sie die Menge der gemeinsamen Teiler von 220 und 235 in extensionaler Schreibweise (Auflistung). Welches ist der größte gemeinsame Teiler von 220 und 235, d. h.  $ggT(220, 235)$ ?

### Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Für beliebige Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt die Gleichung

$$(B \cap (A \cup C)) \cup (A \cup B) = A \cup B.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

### Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei die Menge (das Alphabet)  $\Sigma = \{d, e, f\}$  mit Zeichen  $d$ ,  $e$  und  $f$  gegeben, und es sei  $\Sigma^*$  die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet  $\Sigma$ . Untersuchen Sie die Teilwortrelation  $\sqsubseteq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ , die definiert ist durch

$$\sqsubseteq := \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* ; (\exists y_1, y_2 \in \Sigma^*) [y = y_1xy_2]\}.$$

Dabei bedeutet  $y_1xy_2$  das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter  $y_1$ ,  $x$  und  $y_2$  entsteht. Es gilt beispielsweise  $ed \sqsubseteq ffdede$ , aber  $fe \not\sqsubseteq ffdede$ . Beachten Sie, dass  $\Sigma^*$  auch das sogenannte leere Wort  $\varepsilon$  enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf  $\sqsubseteq$  zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.
2. Sei  $B := \{x \in \Sigma^* ; x \sqsubseteq dedf\}$ . Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von  $\sqsubseteq \cap (B \times B)$ .

#### Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Es gibt genau 8 binäre Relationen über der Menge  $\{2, 4\}$ .
2. Es gibt genau 3 Äquivalenzrelationen über der Menge  $[2, 4]$  natürlicher Zahlen.
3. Sei  $M$  eine nicht leere Menge. Die reflexive transitive Hülle  $R^*$  einer antisymmetrischen Relation  $R \subseteq M \times M$  ist eine partielle Ordnung.

#### Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei  $M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} ; x + 2y \geq 12\}$ . Wir definieren eine binäre Relation  $R$  über  $M$ , d. h.  $R \subseteq M \times M$ , wie folgt:  $((x, y), (x', y')) \in R \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$ .

1. Ist  $R$  reflexiv, symmetrisch, transitiv? Ist  $R$  eine partielle Ordnung über  $M$ ? Ist  $R$  total? Begründung!
2. Ein Element  $x \in M$  heißt minimal bezüglich  $R$ , wenn es kein Element  $y \in M$  gibt mit  $y \neq x$  und  $(y, x) \in R$ . Wie viele minimale Elemente bezüglich  $R$  gibt es? Begründung!

---

**Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

---

## Vorbereitung 1

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  einerseits und andererseits der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen  $p, q, r$ ?

## Vorbereitung 2

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der Potenz  $p^q$ . Die daraus abgeleitete Funktion  $x^a$  nennt man Potenzfunktion, und die Funktion  $a^x$  Exponentialfunktion mit dem Spezialfall  $e^x$ . Die Umkehrung von  $a^x$  führt auf die Logarithmusfunktion  $\log_a x$ .

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl  $x$  zur Basis  $b$  mit  $\log_b x$  bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig  $\log x$ . Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}.$$

Für  $b = e$  bzw.  $b = 10$  bzw.  $b = 2$  schreiben wir  $\ln x$  bzw.  $\lg x$  bzw.  $\text{ld } x$ .

Im Folgenden setzen wir die grundlegenden Eigenschaften der Logarithmus- bzw. Exponentialfunktion als bekannt voraus, also z. B.  $0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ,  $e^0 = 1 < e^z$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{R}^+$ , sowie die Stetigkeit der Funktionen.

Geben Sie einen direkten Beweis für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n},$$

wobei  $0 < a$ ,  $0 < b$ ,  $0 < c$  bzw.  $0 < n$  vorausgesetzt wird.

## Vorbereitung 3

1. Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $F$  an, so dass  $F$  und  $\neg F$  erfüllbar ist!
2. Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!
3. Zeigen Sie, dass die aussagenlogischen Formeln  $(p \Rightarrow q)$  und  $(\neg q \Rightarrow \neg p)$  semantisch äquivalent sind.

## Vorbereitung 4

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen  $x, y, z$  als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

## Vorbereitung 5

Sei  $P(n)$  ein Prädikat für natürliche Zahlen. Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt, stattdessen die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n+1)]. \tag{2}$$

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

**Induktionsanfang:** Es gilt  $P(1)$ :

...

**Induktionsschritt:** Es gilt  $(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ .

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

**Induktionsannahme:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Es gelte  $P(n)$ .

**Induktionsschluss:** Dann gilt  $P(n+1)$ :

...

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $-1 < x$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat  $P(n)$  an und führen Sie den Induktionsbeweis für beliebiges  $x$  unter der Annahme  $-1 < x$  nach dem angegebenen Schema durch.

## Vorbereitung 6

Im Folgenden bezeichnet  $1$  die konstante Funktion, die für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  den Wert  $1$  besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

2. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums  $o(f(n))$ :

$$\frac{1}{n+1} \in o(1).$$

3. Man zeige: Für reellwertige Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \iff f(n) \in o(1).$$

## Tutoraufgabe 1

Seien  $p, q, r$  Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax.

1. Zeigen Sie, dass  $\neg p \vee q \neg$  keine Aussagenlogische Formel ist.
2. Wie viele boolesche Funktionen  $f(p, q)$  gibt es, so dass der Ausdruck  $f(\text{true}, q)$  für alle Belegungen stets wahr ist?
3. Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle für den folgenden booleschen Ausdruck:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \vee (q \wedge r).$$

## Tutoraufgabe 2

Seien  $q, r, s$  Variablenbezeichnungen aus dem Vokabular der aussagenlogischen Syntax. Die aussagenlogischen Formeln  $F$  und  $G$  seien gegeben durch

$$F = (q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s) \quad \text{und} \quad G = ((q \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)) \Leftrightarrow (q \vee (r \Leftrightarrow s)).$$

1. Zeigen Sie, dass  $F$  und  $\neg F$  erfüllbare Formeln sind.
2. Bestimmen Sie die Semantik von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $F$  und  $G$  semantisch nicht äquivalent sind, d. h.  $F \not\equiv G$ .
3. Zeigen Sie, dass  $\neg G$  ein Widerspruch ist. Was bedeutet dies für  $G$ ?

## Tutoraufgabe 3

Sei  $f : \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, die für  $n = 0$  bzw.  $n = 1$  die Werte  $f(0) = 1$  bzw.  $f(1) = 4$  annimmt und für alle  $n \geq 1$  die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 4 \cdot (f(n) - f(n-1)).$$

Man zeige mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(n) = (n+1) \cdot 2^n.$$

## Tutoraufgabe 4

1. Für die reellwertigen Funktionen  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(n) = 2^n$  und  $g(n) = n^2$  gilt  $f(n) \notin o(g(n))$ , d. h.  $(\exists c > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists n \geq n_0 [|f(n)| \geq c \cdot g(n)])$ .

Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für  $c = 5$  die folgende Aussage nachweisen:

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0 \exists n \geq n_0 [2^n \geq 5 \cdot n^2]).$$

2. Geben Sie Funktionen  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  an, für die gilt

$$f(n) \notin o(|g(n)|) \quad \text{und} \quad g(n) \notin O(|f(n)|).$$

## Tutoraufgabe 5

Seien  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  reellwertige Funktionen und  $g$  habe höchstens endlich viele Nullstellen. Zeigen Sie:

$$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0.$$