Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 6
19. September 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 27. September 2011, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten auf die folgenden Fragen und geben Sie das Ergebnis in Dezimalzahldarstellung an. Wie viele

1. surjektive Abbildungen von M auf N gibt es, wenn $|M| = 6$ und $|N| = 5$ gilt?
2. Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Fußbälle auf 8 unterscheidbare Vereine zu verteilen?
3. Möglichkeiten gibt es, 5 nicht unterscheidbare Gegenstände in 5 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
4. Partitionen einer 10-elementigen Menge gibt es, wenn nur diejenigen Partitionen gezählt werden, die aus 5 Klassen mit je 2 Elementen bestehen?

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten 3 völlig gleiche Motorräder, 2 völlig gleiche Personenkraftwagen, und einen Lastkraftwagen.

1. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, 5 völlig gleiche Firmenschilder auf die Fahrzeuge zu verteilen, so dass jedes Fahrzeug höchstens ein Firmenschild erhält?
2. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, wenn jeder von 5 verschiedenen Personen genau ein Fahrzeug zuzuteilen ist?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir zählen gewisse Möglichkeiten, Wörter über dem 3-elementigen Alphabet $A = \{a, b, x\}$ zu bilden. Geben Sie alle Ergebnisse in Dezimalzahldarstellung an und begründen Sie Ihre Ergebnisse!

1. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ gibt es, in denen der Buchstabe a höchstens einmal und der Buchstabe b höchstens zweimal vorkommt (z. B. ba, das leere Wort ϵ)?
2. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ der Länge 11 gibt es, in denen genau zweimal der Buchstabe a vorkommt und gleichzeitig mindestens zwei Buchstaben b zwischen den beiden a's auftreten?
3. Wie viele Wörter über A der Länge 6 gibt es, in denen der Buchstabe a einmal, der Buchstabe b zweimal und der Buchstabe x dreimal vorkommt?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten ein Glücksspiel „4 aus 25“, bei dem 4 Zahlen aus [25] gezogen werden.

1. Wir lassen zu, dass Zahlen mehrfach gezogen werden, insgesamt aber nur 4 Mal eine Zahl gezogen wird. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Zahlen an.

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es?

2. Nun ändern wir die Bedingungen für Ziehungen so, dass nur verschiedene Zahlen und nie zwei benachbarte Zahlen n und $n+1$ gezogen werden. (D. h., dass Ziehungen mit benachbarten Zahlen, z. B. $2, 5, 6, 17$, nicht zulässig sind.)

   Wie viele zulässige Ziehungen gibt es in diesem Fall?
   Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck für das Ergebnis an.

Allgemeiner Hinweis: Binomialkoeffizienten brauchen nicht in Dezimalzahldarstellung ausgewertet zu werden.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für die folgenden Summen für $n \geq 1$ eine geschlossene Form mit Parameter n.

(i) $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot 2^k$.   (ii) $S_2 = \sum_{k=1}^{n} 9k4^k$.

Hausaufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie durch Anwendung der Binomialinversion eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-n)^{\overline{k}} a_k \, .$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* <u>*Vorbereitungsaufgabe*</u>*,* <u>*Tutoraufgabe*</u> *und* <u>*Hausaufgabe*</u> *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{bzw.} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

1. Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) + B(z)$.
2. Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$.
3. Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = z \cdot A(z)$.
4. Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$.
5. Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z)$.

Vorbereitung 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}\,.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Vorbereitung 3

Bearbeiten Sie Arbeitsblatt 3 über die Lösung von Rekursionsgleichungen.

Vorbereitung 4

Die Gradfolge eines einfachen ungerichteten Graphen G mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist definiert als die Folge der in absteigender Reihenfolge angeordneten Knotengrade $\mathrm{d}(v_i)$.

1. Gibt es Graphen zu folgenden Gradfolgen?
   i) $(2, 1, 0)$. ii) $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$. iii) $(3, 3, 3, 2, 2, 2)$.
2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Zwei isomorphe Graphen haben die gleiche Gradfolge.
   ii) Zwei Graphen, die die gleiche Gradfolge haben, sind isomorph.

Vorbereitung 5

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Tutoraufgabe 1

1. Gegeben sei die Rekursionsgleichung $f_n - 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0 \; \forall n \geq 2$ mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a$ und $f_1 = b$.
   (a) Bestimmen Sie die entsprechende vollständige Rekursion (siehe Arbeitsblatt 3).
   (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursiongleichung.
   (c) Zeigen Sie, dass $F(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$ die erzeugende Funktion zur Rekursionsgleichung ist.
   (d) Zeigen Sie, dass $f_n = \left(\left(\frac{b}{2} - a\right) n + a\right) 2^n$ gilt für alle $n \geq 0$.
2. Sei a_n für $n \geq 0$ definiert durch $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$. Zeigen Sie, dass stets $a_n \in \mathbb{N}$ gilt, und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsgleichung für die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ an.

Tutoraufgabe 2

Gegeben sei die inhomogene lineare Rekursion für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+1} + 3\cdot f_n \;=\; n\cdot 2^n\,, \quad \forall n \geq 0\,. \tag{1}$$

1. Leiten Sie für $s_n = n\cdot 2^n$ eine Rekursion der folgenden Form her
$$s_{n+2} + a\cdot s_{n+1} + b\cdot s_n \;=\; 0\,, \quad \forall n \geq 0 \tag{2}$$
   und bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Leiten Sie durch geeignete Substitution aus den Gleichungen (1) und (2) eine homogene Rekursion für $(f_n)_{n\geq 0}$ der folgenden Form her
$$f_{n+3} + q_1\cdot f_{n+2} + q_2\cdot f_{n+1} + q_3\cdot f_n \;=\; 0\,, \quad \forall n \geq 0 \tag{3}$$
   und bestimmen Sie $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.
3. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursion (3) an.
4. Lösen Sie die Rekursion (1) mit Nebenbedingung $f_0 = 1$. Geben Sie die erzeugende Funktion der erhaltenen Lösung an.

Tutoraufgabe 3

1. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit den bipartiten Zerlegungen $B_1 = (U_1, U_2, E)$ und $B_2 = (V_1, V_2, E)$, so dass $U_1 \neq V_1$, $U_1 \neq V_2$ gilt.

   Zeigen Sie, dass G zwei verschiedene Komponenten besitzt.
2. Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gilt $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$. Beweis!

Tutoraufgabe 4

Eine Brücke in einem zusammenhängenden einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, so dass $G' = (V, E\backslash\{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Man zeige:

1. Ein Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält keine Brücke.
2. Eine Kante ist genau dann eine Brücke, wenn sie auf keinem Kreis liegt.