

## Gedächtnislosigkeit

### Satz 105 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  mit Wertebereich  $\mathbb{R}^+$  ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle  $x, y > 0$  gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]. \quad (*)$$

#### Beweis:

Sei  $X$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt  $X$  eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung (\*) erfüllt. Wir definieren  $g(x) := \Pr[X > x]$ . Für  $x, y > 0$  gilt

$$\begin{aligned}g(x + y) &= \Pr[X > x + y] \\&= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\&= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y).\end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch  $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$ .

### Beweis (Forts.):

Da  $X$  nur positive Werte annimmt, muss es ein  $n \in \mathbb{N}$  geben mit  $g(1/n) > 0$ . Wegen  $0 < g(1) \leq 1$  muss es daher auch ein  $\lambda \geq 0$  geben mit  $g(1) = e^{-\lambda}$ .

Nun gilt für beliebige  $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit  $g(r) = e^{-\lambda r}$  für alle  $r \in \mathbb{Q}^+$ .

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$



## Beispiel 106

Über das Cäsium-Isotop  $^{134}_{55}\text{Cs}$  ist bekannt, dass es eine mittlere Lebensdauer von ungefähr 3,03 Jahren oder  $1,55 \cdot 10^6$  Minuten besitzt. Die Zufallsvariable  $X$  messe die Lebenszeit eines bestimmten  $^{134}_{55}\text{Cs}$ -Atoms.  $X$  ist exponentialverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{1,55 \cdot 10^6} \approx 0,645 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{\text{min}} \right]$$

Da  $\lambda$  den Kehrwert einer Zeit als Einheit besitzt, spricht man von der **Zerfallsrate**. Auch bei anderen Anwendungen ist es üblich,  $\lambda$  als **Rate** einzuführen.

### 2.3.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

**Erinnerung:** Die **Poisson-Verteilung** lässt sich als Grenzwert der **Binomialverteilung** darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen  $X_n$  mit Parameter  $p_n = \lambda/n$ . Für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_n \leq k \cdot n$ , gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \leq kn] &= \sum_{i=1}^{kn} (1 - p_n)^{i-1} \cdot p_n = p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1} (1 - p_n)^i \\ &= p_n \cdot \frac{1 - (1 - p_n)^{kn}}{p_n} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$  gilt daher für die Zufallsvariablen  $Y_n := \frac{1}{n}X_n$ , dass

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Y_n \leq t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X_n \leq t \cdot n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn} \right] \\ &= 1 - e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Die Folge  $Y_n$  der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für  $n \rightarrow \infty$  in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$  über.

### 3. Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

#### 3.1 Mehrdimensionale Dichten

##### Beobachtung

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen  $X, Y$  wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über  $\mathbb{R}^2$  durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$

Unter einem **Bereich**  $B$  verstehen wir dabei Mengen der Art

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen“ bzw.  $\pm\infty$  sein.



Analog zum eindimensionalen Fall ordnen wir der Dichte  $f_{X,Y}$  eine (gemeinsame) Verteilung  $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  zu:

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

## 3.2 Randverteilungen und Unabhängigkeit

### Definition 107

Sei  $f_{X,Y}$  die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Die **Randverteilung** der Variablen  $X$  ist gegeben durch

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) \, dv \right] du.$$

Analog nennen wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) \, dv$$

die **Randdichte** von  $X$ . Entsprechende Definitionen gelten symmetrisch für  $Y$ .

## Definition 108

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  heißen **unabhängig**, wenn

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y]$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Für mehrere Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt analog:  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann unabhängig, wenn

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

#### Warten auf mehrere Ereignisse

##### Satz 109

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist auch  $X := \min\{X_1, \dots, X_n\}$  exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

##### Beweis:

Der allgemeine Fall folgt mittels Induktion aus dem für  $n = 2$ . Für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt:

$$\begin{aligned} 1 - F_X(t) &= \Pr[X > t] = \Pr[\min\{X_1, X_2\} > t] \\ &= \Pr[X_1 > t, X_2 > t] \\ &= \Pr[X_1 > t] \cdot \Pr[X_2 > t] \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$



Anschaulich besagt Satz 109, dass sich die Raten addieren, wenn man auf das erste Eintreten eines Ereignisses aus mehreren unabhängigen Ereignissen wartet. Wenn beispielsweise ein Atom die Zerfallsrate  $\lambda$  besitzt, so erhalten wir bei  $n$  Atomen die Zerfallsrate  $n\lambda$  (wie uns auch die Intuition sagt).

## Poisson-Prozess

Wir hatten bei der Diskussion der geometrischen und der Poisson-Verteilung festgestellt:

Wenn der zeitliche Abstand der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist ihre Anzahl in einer festen Zeitspanne binomialverteilt.

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ , wobei wir die Trefferwahrscheinlichkeit mit  $p_n = \lambda/n$  ansetzen, konvergiert die geometrische Verteilung gegen die Exponentialverteilung und die Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung. Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  erwarten wir deshalb die folgende Aussage:

Wenn man Ereignisse zählt, deren zeitlicher Abstand exponentialverteilt ist, so ist die Anzahl dieser Ereignisse in einer festen Zeitspanne Poisson-verteilt.

Seien  $T_1, T_2 \dots$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$ . Die Zufallsvariable  $T_i$  modelliert die Zeit, die zwischen Treffer  $i - 1$  und  $i$  vergeht.

Für den Zeitpunkt  $t > 0$  definieren wir

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_1 + \dots + T_n \leq t\}.$$

$X(t)$  gibt also an, wie viele Treffer sich bis zur Zeit  $t$  (von Zeit Null ab) ereignet haben. Es gilt:



## Fakt 110

Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen und sei  $X(t)$  für  $t > 0$  wie oben definiert. Dann gilt:  $X(t)$  ist genau dann Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda$ , wenn es sich bei  $T_1, T_2, \dots$  um exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$  handelt.

Zum Zufallsexperiment, das durch  $T_1, T_2, \dots$  definiert ist, erhalten wir für jeden Wert  $t > 0$  eine Zufallsvariable  $X(t)$ . Hierbei können wir  $t$  als Zeit interpretieren und  $X(t)$  als Verhalten des Experiments zur Zeit  $t$ . Eine solche Familie  $(X(t))_{t>0}$  von Zufallsvariablen nennt man allgemein einen **stochastischen Prozess**. Der hier betrachtete Prozess, bei dem  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen sind, heißt **Poisson-Prozess** und stellt ein fundamentales und zugleich praktisch sehr bedeutsames Beispiel für einen stochastischen Prozess dar.

## Beispiel 111

Wir betrachten eine Menge von Jobs, die auf einem Prozessor sequentiell abgearbeitet werden. Die Laufzeiten der Jobs seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda = 1/30[1/s]$ . Jeder Job benötigt also im Mittel  $30s$ .

Gemäß Fakt 110 ist die Anzahl von Jobs, die in einer Minute vollständig ausgeführt werden, Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda = 60 \cdot (1/30) = 2$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute höchstens ein Job abgearbeitet wird, beträgt in diesem Fall ( $t\lambda = 2$ )

$$e^{-t\lambda} + t\lambda e^{-t\lambda} \approx 0,406 .$$

### 3.4 Summen von Zufallsvariablen

#### Satz 112

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen. Für die Dichte von  $Z := X + Y$  gilt

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \, dx.$$

#### Beweis:

Nach Definition der Verteilungsfunktion gilt

$$F_Z(t) = \Pr[Z \leq t] = \Pr[X + Y \leq t] = \int_{A(t)} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

wobei  $A(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq t\}$ .

## Beweis (Forts.):

Aus der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  folgt

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \int_{A(t)} f_X(x) \cdot f_Y(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \left( \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Mittels der Substitution  $z := x + y$ ,  $dz = dy$  ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy = \int_{-\infty}^t f_Y(z - x) \, dz$$

und somit

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) \, dx \right) dz.$$

□

## Satz 113 (Additivität der Normalverteilung)

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern  $\mu_i, \sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Es gilt: Die Zufallsvariable

$$Z := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$  und Varianz  $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$ .

### Beweis:

Wir beweisen zunächst den Fall  $n = 2$  und  $a_1 = a_2 = 1$ . Nach Satz 112 gilt für  $Z := X_1 + X_2$ , dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-y) \cdot f_{X_2}(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}_{=:v}\right) \, dy. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mu &:= \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 &:= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ v_1 &:= (z - \mu)/\sigma \\ v_2^2 &:= v - v_1^2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich unmittelbar

$$v_2^2 = \frac{(z - y - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{(z - \mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2},$$

woraus wir

$$v_2 = \frac{y\sigma_1^2 - \mu_2\sigma_1^2 + y\sigma_2^2 - z\sigma_2^2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma}$$

ermitteln.

## Beweis (Forts.):

Damit folgt für die gesuchte Dichte

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) \mathrm{d}y.$$

Wir substituieren noch

$$t := v_2 \text{ und } \mathrm{d}t = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2} \mathrm{d}y$$

und erhalten

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Mit Lemma 99 folgt, dass  $f_Z(z) = \varphi(z; \mu, \sigma)$  ist.

## Beweis (Forts.):

Daraus erhalten wir die Behauptung für  $n = 2$ , denn den Fall  $Z := a_1X_1 + a_2X_2$  für beliebige Werte  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  können wir leicht mit Hilfe von Satz 100 auf den soeben bewiesenen Fall reduzieren. Durch Induktion kann die Aussage auf beliebige Werte  $n \in \mathbb{N}$  verallgemeinert werden. □



### 3.5 Momenterzeugende Funktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen  $X$  haben wir die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für  $M_X(s)$  gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.

## Beispiel 114

Für eine auf  $[a, b]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U$  gilt

$$\begin{aligned}M_U(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\&= \left[ \frac{e^{tx}}{t(b-a)} \right]_a^b \\&= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.\end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt

$$\begin{aligned}M_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\xi)^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2}.\end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  wegen  $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\&= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma) \cdot \frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\&= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\&= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2} .\end{aligned}$$

Weiterer Beweis von Satz 113:

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Beispiel gilt

$$M_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + (t\sigma_i)^2/2}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der  $X_i$  folgt

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{t(a_1X_1 + \dots + a_nX_n)}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{(a_it)X_i}] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_it) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{a_it\mu_i + (a_it\sigma_i)^2/2} \\ &= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2}, \end{aligned}$$

mit  $\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$  und  $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$ . □

## 4. Zentraler Grenzwertsatz

### Satz 115 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von  $X_i$  existieren für  $i = 1, \dots, n$  und seien mit  $\mu$  bzw.  $\sigma^2$  bezeichnet ( $\sigma^2 > 0$ ).

Die Zufallsvariablen  $Y_n$  seien definiert durch  $Y_n := X_1 + \dots + X_n$  für  $n \geq 1$ . Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

*asymptotisch standardnormalverteilt* sind, also  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Etwas formaler ausgedrückt gilt: Die Folge der zu  $Z_n$  gehörenden Verteilungsfunktionen  $F_n$  hat die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir sagen dazu auch: Die Verteilung von  $Z_n$  **konvergiert** gegen die Standardnormalverteilung für  $n \rightarrow \infty$ .

Dieser Satz ist von großer Bedeutung für die Anwendung der Normalverteilung in der Statistik. Der Satz besagt, dass sich die Verteilung einer Summe **beliebiger** unabhängiger Zufallsvariablen (mit endlichem Erwartungswert und Varianz) der Normalverteilung umso mehr annähert, je mehr Zufallsvariablen an der Summe beteiligt sind.



## Beweis:

Wir betrachten  $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$  für  $i = 1, \dots, n$  mit  $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$  und  $\text{Var}[X_i^*] = 1$ .  
Damit gilt (gemäß vorhergehendem **Beispiel**)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \dots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \dots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Für beliebiges  $i$  betrachten wir die Taylorentwicklung von  $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$  an der Stelle  $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

## Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \text{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt  $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ , und wir können  $M_Z(t)$  umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \rightarrow e^{t^2/2} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Konvergenz der momenterzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist  $Z$  asymptotisch normalverteilt.

## Beweis (Forts.):

Die momenterzeugende Funktion existiert leider nicht bei allen Zufallsvariablen und unser Beweis ist deshalb unvollständig. Man umgeht dieses Problem, indem man statt der momenterzeugenden Funktion die so genannte **charakteristische Funktion**  $\tilde{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$  betrachtet. Für Details verweisen wir auf die einschlägige Literatur. □

Der Zentrale Grenzwertsatz hat die folgende intuitive Konsequenz:

*Wenn eine Zufallsgröße durch lineare Kombination vieler unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen entsteht, so erhält man näherungsweise eine Normalverteilung.*