SS 2011

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/uebung/

22. Juli 2011

ZÜ VI

Übersicht:

1. Thema: Markov-Ketten:

   Erwartete Übergangszeit
   Erwartete Rückkehrzeit
   Ankunftswahrscheinlichkeit
   Rückkehrwahrscheinlichkeit

2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben:

   VA's von Blatt 11 siehe Musterlösung.

1. Thema: Markov-Ketten

1.1 Vorbemerkungen

Man beachte, dass Markov-Ketten in der Regel durch Übergangsdiagramme definiert werden.

In den Diagrammen werden nur positive Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.

Alle übrigen Übergänge haben die Wahrscheinlichkeit 0.

Zentrale Begriffe:

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit diskreter Zeit, d. h. eine Folge von Zufallsvariablen, die der Markov-Bedingung genügt. Der Zustandsraum sei S.

Man beachte, dass die Ergebnisse, die von einer Markov-Kette angenommen werden können, unendliche Zustandsfolgen $(s_0, s_1, \dots, s_n, \dots) \in S^{\mathbb{N}_0} = \Omega$ sind.

Die diskreten Zufallsvariablen $T_{i,j}$ bzw. T_i für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 0\,;\, X_n = j,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

$$T_i = \min\{n \geq 1\,;\, X_n = i,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

heißen Übergangszeit bzw. Rückkehrzeit.

Man beachte:

$T_{i,j}$ und T_i sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit $X_0 \neq i$ undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit $X_0 \neq i$ in dem durch $X_0 = i$ bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus Ω alle Ergebnisfolgen mit $X_0 \neq i$ und definieren den bedingten Ergebnisraum $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}\,;\, X_0 \neq i\}$.

Dann gelten

$T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ und $T_i : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}\,.$

Die Dichtefunktionen $f_{T_{i,j}}$ und f_{T_i} haben also den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Im Allgemeinen gilt $f_{T_{i,j}}(+\infty) \neq 0$ und $f_{T_i}(+\infty) \neq 0$.

Speziell gilt für alle $x \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

$$f_{T_{i,i}}(x) = \begin{cases} 1 : x = 0\,, \\ 0 : \text{sonst}\,. \end{cases}$$

1.2 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit

Auf die Zufallsvariablen $T_{i,j}$ und T_i stützen sich die Begriffe

Ankunftswahrscheinlichkeit bzw. Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_{i,j} \quad \text{bzw.} \quad f_i \,.$$

Es gelten $f_{i,j} = \Pr[T_{i,j} < +\infty]$ und $f_i = \Pr[T_i < +\infty]\,.$

Die folgenden Eigenschaften einer Markov-Kette hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.

Man beachte, dass in das Übergangsdiagramm nur Pfeile mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen werden dürfen.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccc} f_i = 0, & 0 < f_i < 1, & f_i = 1, \\ f_{i,j} = 0, & 0 < f_{i,j} < 1, & f_{i,j} = 1\,. \end{array}$$

$\underline{f_{i,j} = 0 \text{ bzw. } f_i = 0}$:

Es gibt keinen Pfad vom Knoten i nach Knoten j bzw. von i zurück auf sich selbst.

$\underline{f_{i,j} = 1 \text{ bzw. } f_i = 1}$:

Jeder bei i beginnende Pfad kann zu einem Pfad bis zu j bzw. zu i zurück verlängert werden.

$\underline{0 < f_{i,j} < 1 \text{ bzw. } 0 < f_i < 1}$:

Die vorausgegangenen Eigenschaften treffen nicht zu.

Abgeleitete Eigenschaften für Zustände $i \in S$:

i ist transient, falls $f_i < 1$.

i ist rekurrent, falls $f_i = 1$.

i ist absorbierend, falls $f_{i,j} = 0$ für alle $j \neq i$ gilt.

Bemerkung: Auch die Eigenschaften ,,irreduzibel", ,,periodisch" und ,,aperiodisch" hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.
Folglich gilt Gleiches auch für die Eigenschaft ,,ergodisch".

Berechnung der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle $f_{i,j}$ und f_i durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche i, j die Gleichungen $f_{i,j} = 0$, $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 0$, $f_i = 1$ gelten.

2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ f_i &= p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise“ lösen.

1.3 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und T_i

Erwartete Übergangszeit: $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$.

Erwartete Rückkehrzeit: $h_i := \mathbb{E}[T_i]$.

Es gilt:

Falls $|S| < \infty$, dann existieren die Erwartungswerte $h_{i,j}$ bzw. h_i genau dann, wenn $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$ gilt.
Die Berechnung erfolgt nach Vorlesung mit Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ h_i &= 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}\,. \end{aligned}$$

2. Vorbereitung auf Tutoraufgaben: VA's von Blatt 11

Siehe Musterlösung!