Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 4
23. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 31. Mai 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten drei 6-seitige Würfel A, B und C. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten. Der Würfel C ist ein üblicher Würfel, der die Augenzahlen 1 bis 6 zeigt. Wir nehmen an, dass die Ergebnisse von Würfen Laplace-verteilt sind bezüglich des Auftretens der Würfelseiten.

Experiment: Es wird zunächst C geworfen. Falls die 6 geworfen wurde, so wird Würfel A gewählt, ansonsten wird Würfel B gewählt. Mit dem gewählten Würfel werden dann $n \geq 3$ Würfe durchgeführt. Das Ergebnis ist ein Wort $w \in \{\text{rot}, \text{blau}\}^*$ der Länge n.

1. Wir sagen, dass das Ereignis R_i eintritt, wenn das i-te Zeichen der Ausgabe w des Experiments 'rot' ist. Wir nehmen an, dass die Ereignisse R_1 und R_2 eingetreten sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das Ereignis R_3 eintritt?

2. Wir nehmen an, dass das Ereignis $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Experiment der Würfel A gewählt wurde?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:
Paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $\langle K, +, \cdot \rangle$ ein Körper. Man beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \;=\; & 1 - \sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{i_1} \\
& + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \\
& \vdots \\
& + (-1)^l \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l} \\
& \vdots \\
& + (-1)^n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sie besitzen n Passwörter, von denen genau eines den Zugang zu einem Rechner gestattet. Sie wollen Zugang zu dem Rechner erhalten und wählen zufällig so lange ein Passwort aus, bis Sie schließlich das Richtige gefunden haben.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X_n, die die Anzahl der benötigten Versuche zählt, wenn

1. jedes Passwort höchstens einmal verwendet wird.

2. jedes Passwort beliebig oft verwendet werden kann. Unterscheiden Sie dabei, ob der erste Versuch erfolgreich war oder nicht.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

In der statistischen Physik pflegt man die Verteilung gewisser Teilchen (Moleküle, Photonen, Elektronen, usw.) zu betrachten. Man nimmt an, dass sich jedes Teilchen durch einen Vektor von Kenngrößen charakterisieren läßt, der der Zuordnung des Teilchens in eine von N „Zellen“ eines „Phasenraumes“ entspricht. Der Zustand eines physikalischen Systems wird dann dadurch beschrieben, dass man angibt, wie viele Teilchen sich jeweils in einer Zelle befinden.

1. Die Annahme, dass jede Verteilung von n Gasmolekülen auf N Zellen gleichwahrscheinlich ist, nennt man *Maxwell-Boltzmannsche Statistik*. Dabei wird die Unterscheidbarkeit der Gasmoleküle vorausgesetzt.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich k Gasmoleküle in einer bestimmten Zelle befinden.

2. Photonen und Elektronen werden nicht als unterscheidbare Teilchen betrachtet. Demgemäß gilt die Maxwell-Boltzmannsche Statistik nicht. Die auf der Annahme der Nichtunterscheidbarkeit von Teilchen beruhende Statistik nennt man *Bose-Einsteinsche Statistik*. Sie wird für Photonen angewendet.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich k Photonen in einer bestimmten Zelle befinden.

3. Für Elektronen hat man noch die zusätzliche Einschränkung (*Paulisches Prinzip*), dass sich in einer Zelle stets höchstens ein Teilchen befinden kann. Diesen Umstand berücksichtigt die *Fermi-Diracsche Statistik*.

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron in einer bestimmten Zelle befindet.

Vorbereitung 2

Inwiefern kann man behaupten, dass die negative Binomialverteilung sowohl die geometrische Verteilung als auch die Binomialverteilung als Spezialfälle enthält?

Tutoraufgabe 1

1. Zeigen Sie für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$|\{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j \,;\, s_1 + \ldots + s_j \leq n\}| = \binom{n}{j}.$$

2. Sie führen das folgende mehrstufige Experiment durch:

   In jedem Schritt wählen Sie zufällig und gleichverteilt eine Zahl zwischen 1 und n aus, d. h., in jedem Schritt und für alle i mit $1 \leq i \leq n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Zahl i ziehen, gleich $\frac{1}{n}$. Das Experiment endet, nachdem die Summe der gezogenen Zahlen das erste Mal größer als n ist. Die Zufallsvariable X gibt an, nach wie vielen Schritten das Experiment endet.

   Zeigen Sie:

$$\Pr[X \geq j+1] = \frac{\binom{n}{j}}{n^j} \quad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots \,.$$

3. Folgern Sie

$$\mathbb{E}[X] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,.$$

Tutoraufgabe 2

Wir nehmen eine zufällige Auswahl P' eines Parameters $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[n] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$ an. Dann definieren wir einen Prozess P'' dadurch, dass zunächst P' aufgerufen wird und der ausgegebene Wert als Eingabeparameter n für den Aufruf von P_n verwendet wird. Dabei wählt P_n n-mal einen Buchstaben aus der Menge $\{a, b, c\}$ aus, und zwar ein a bzw. b bzw. c mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess P'' ein Wort w ausgibt, das genau ein a enthält. Geben Sie insbesondere den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum an.

Tutoraufgabe 3

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 Mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei (nach dem Wurf Nummer 0) geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n-1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Geben Sie für Z den Erwartungswert an.

4. Beschreiben Sie mit Hilfe der Faltung von Dichtefunktionen $f_{X_i}, i = 1, 2, \ldots$ ein Verfahren zur Berechnung der Dichtefunktion f_Z.