Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 5
30. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 7. Juni 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Omega = [1, 60] \subseteq \mathbb{N}$, so dass alle Ergebnisse aus Ω gleichwahrscheinlich sind. Seien X_1 und X_2 Indikatorvariablen über W, deren Verteilung durch die folgenden Ereignisse gegeben ist:

$$A := X_1^{-1}(1) \;=\; [1, 15] \quad \text{und} \quad B := X_2^{-1}(1) \;=\; [13, 24]\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind.
2. Geben Sie eine Indikatorvariable X_3 mit $\Pr[X_3 = 1] = \frac{1}{3}$ an, so dass die Variablen X_1, X_2, X_3 unabhängig sind.
3. Sei $X = X_1 + X_2 + X_3$ mit X_3 wie vorausgehend. Berechnen Sie $\Pr[X = 1]$.

Hinweis: $[1, n] = \{i \in \mathbb{N}\,;\, 1 \leq i \leq n\}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei $Y(\omega) = (X(\omega) \mod 2)$ für alle $\omega \in \Omega$.

1. Geben Sie W_X und W_Y an.
2. Berechnen Sie $\Pr[Y = 0]$.
3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Y für $p = \frac{1}{3}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir wählen nacheinander Laplace-zufällig und unabhängig Buchstaben aus der 6-elementigen Multimenge der Buchstabenvorkommen des Wortes `ARARAT` aus. Wir legen dabei jeden Buchstaben wieder zurück, der nicht `A` ist, und legen aber ein gewähltes `A` nicht wieder zurück. Wir definieren die Zufallsvariable X wie folgt.

$$X := \text{Anzahl der Züge, bis alle } \texttt{A} \text{ gezogen wurden.}$$

1. Geben Sie dabei die Zufallsvariable X als Abbildung einer geeigneten Ergebnismenge Ω eines entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ an.
2. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Mit einer Münze, die bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ Kopf zeigt, wird genau so lange geworfen, bis Kopf und Zahl das erste Mal mindestens zweimal vorgekommen sind. Der Wert der Zufallsvariablen X sei durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ approximativ!

Hinweis: Diese Aufgabe gehört zu den schwierigeren Aufgaben und kann deshalb durchaus zeitaufwändig sein. Wir werden sehr gute Lösungen prämieren.

__Hinweis:__ Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

X sei Poisson-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

Vorbereitung 2

Eine Firma stellt Kuchen mit Rosinen her. Hierfür werden $\lambda \cdot N$ Rosinen in den Teig für N Kuchen gegeben, woraufhin die ganze Masse so gut durchmischt wird, dass wir annehmen können, dass jede einzelne Rosine mit derselben Wahrscheinlichkeit in einem der Kuchen landet. N ist unbekannt und groß.

Wie groß muss die durchschnittliche Zahl λ von Rosinen pro Kuchen sein, wenn höchstens durchschnittlich jeder hundertste Kuchen keine Rosinen enthalten darf?

Vorbereitung 3

Zwei Arbeiter A und B kontrollieren unabhängig eine Tagesproduktion. A und B protokollieren k_1 bzw. k_2 tatsächliche Fehler. Es sei n die Anzahl der tatsächlich aufgetretenen Produktionsfehler. Wir nehmen an, dass die Arbeiter jeden der n Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 bzw. p_2 registriert haben.

Es seien X_1 bzw. X_2 die Zufallsvariablen, die die Anzahl der von Arbeiter A bzw. B gefundenen Fehler angeben. Wie sind die X_i verteilt? Für welche Werte von n gilt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \geq 0.1] \leq 0.01\,?$$

Tutoraufgabe 1

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

2. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon nicht verhungert.

Tutoraufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

   Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \to \infty$?

2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit (logarithmischem) Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\ln Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

   $$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \leq \frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

   Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

3. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt!