Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 8
27. Juni 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 5. Juli 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sie werfen eine kreisförmige Münze mit Radius 0.5 auf ein Quadrat mit Seitenlänge 4, wobei der Mittelpunkt der Münze stets innerhalb des Quadrats zu liegen kommt.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze über den Rand des Quadrats hinausragt, wenn wir eine Gleichverteilung des Mittelpunkts der Münze auf der Quadratfläche annehmen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien X und Y kontinuierliche Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy^2 & : \quad 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$.
2. Bestimmen Sie den Wert der Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. Zeigen Sie die Unabhängigkeit der Variablen X und Y.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Lebensdauer T eines Rechners habe die folgende mit $\lambda > 0$ parametrisierte Dichte:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & : t \ge 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

1. Berechnen Sie $\Pr[T \le \frac{2}{\lambda}]$.
2. Berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$ in Abhängigkeit von λ.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Falls $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ normalverteilt sind, dann folgt $\mathrm{Var}[X+Y] = 3$.
2. Seien X und Y standardnormalverteilt. Dann gilt $\Pr[X \le 0] = \Pr[Y \ge 0]$.
3. Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen existiert stets der Erwartungswert.
4. Seien $X \sim \mathrm{Po}(1)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{1}{n})$. Dann gilt $|\Pr[X = 2n] - \Pr[Y = 2n]| < 2^{-n}$.
5. Sei X exponentialverteilt. Dann gilt $\Pr[X > 2 \mid X > 1] + \Pr[X \le 1] = 1$.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

In welcher Weise hängt der „Random Walk" mit Tutoraufgabe 1 zusammen?

Vorbereitung 2

In einem Unfallkrankenhaus treffen im Schnitt alle 20 Minuten Patienten zur Behandlung ein. Die Zeit zwischen zwei Behandlungsfällen sei exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{20}$. Wenn 1 Stunde lang kein Patient eingetroffen ist, macht das Personal Ruhepause. Wir wollen wissen, welcher Zeitabstand zwischen zwei Ruhepausen zu erwarten ist.
Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Zeitspannen zwischen dem Eintreffen zweier Behandlungsfälle und W die Wartezeit bis zur nächsten Ruhepause.

1. Geben Sie $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 60]$ an.
2. Geben Sie $\mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 60]$ an.
3. Berechnen Sie $\mathbb{E}[W]$.

Vorbereitung 3

Bei einem Einwahlserver für $n = 10^3$ Teilnehmer nehmen wir an, dass zu einem festen Zeitpunkt jeder Teilnehmer mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,05$ Zugriff auf den Server wünscht.

Berechnen Sie eine Näherung der Wahrscheinlichkeit, mit der gleichzeitig mehr als 55 Verbindungswünsche auftreten? Approximieren Sie dabei die Binomialverteilung durch die entsprechende Normalverteilung und benutzen Sie ggf. geeignete Tabellen für die Werte der Standardnormalverteilung.

Vorbereitung 4

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(2000, 0.05)$. Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen sowohl für eine Approximation von entsprechenden Verteilungen mit Poisson-Verteilung als auch mit Normalverteilung vorliegen.
Berechnen Sie approximativ

1. $\Pr[X = 110]$,
2. $\Pr[X > 110]$.

Begründen Sie jeweils die Wahl einer der Approximationen.

Tutoraufgabe 1

Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ „Zahl“ zeigt. Wir betrachten für eine Folge von Würfen $W_1, W_2, \ldots$ das Ereignis $E(i,k)$, beim i-ten Wurf weniger als $(\frac{i}{2}+k)$-mal „Kopf“ geworfen zu haben.
Widerlegen Sie:

$$\forall k > 0: \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)\right] = 0\,.$$

Tutoraufgabe 2

Wir benutzen die Funktion $h(t) = 0.027 + 0.0025 \cdot (t-40)^2$ für $t \in \mathbb{R}$, um die „Sterblichkeitsrate“ durch Lungenkrebs von Kettenraucherinnen abzuschätzen, die mindestens $t \geq 40$ Jahre alt sind. Ihre Lebensdauer sei X und es gelte

$$\Pr[X > t \,|\, X > 40] = \exp\left(-\int_{40}^{t} h(s)\mathrm{d}s\right)\,.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 45-jährige Kettenraucherin mindestens 50 Jahre alt wird?

Tutoraufgabe 3

Sei $X = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ die Summe der Augenzahlen, wenn man 2000-mal mit einem idealen Würfel würfelt.

1. Berechnen Sie näherungsweise $\Pr[7000 \leq X \leq 7100]$!
2. Wie groß muss man Δ wählen, damit $\Pr[7000-\Delta \leq X \leq 7000+\Delta] \approx \frac{1}{2}$ gilt?

Approximieren Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.