4.8.2 Differenzenoperator

Definition 198

Sei f eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Der Operator

$$E : f \mapsto E(f)$$

mit $E(f)(x) := f(x+1)$ heißt Translationsoperator.

$$\Delta : f \mapsto \Delta(f)$$

mit $\Delta(f)(x) := f(x+1) - f(x)$ heißt (Vorwärts-)Differenzenoperator.

$$\nabla : f \mapsto \nabla(f)$$

mit $\nabla(f)(x) := f(x) - f(x-1)$ heißt (Rückwärts-)Differenzenoperator.

Mit I als dem Identitätsoperator, (also $I(f) = f$) gilt damit

$$\Delta(f) = (E - I)(f)$$

$$\nabla(f) = (I - E^{-1})(f)$$

Beispiel 199

Sei $a \in \mathbb{N}_0$:

$$E^a(f)(x) = \underbrace{(E \circ E \circ \cdots \circ E)}_{a}(f)(x) = f(x+a)$$

Beobachtungen:

Seien P, Q Operatoren $\in \{E, I, \Delta, \nabla\}$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $$(P \pm Q)(f+g) = P(f) + P(g) \pm (Q(f) + Q(g))$$

2. $$(\alpha P)(f) = \alpha \cdot P(f)$$

3. $$(QP)(f) = Q\big(P(f)\big), \text{ i. a. } (QP)(f) \neq (PQ)(f)$$

4. $$\Delta^n = (E-I)^n = \underbrace{(E-I)\ldots(E-I)}_{n} = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)$$

Satz 200

Aus (4) folgt:

$$\Delta^n(f)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}E^k\right)(f)(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k)\,.$$

Beweis:

Klar. $\square$

Beispiel 201

$$\Delta^2(x^3)\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\binom{2}{k}k^3 = 0 - 2 + 8 = 6$$

4.8.3 Fallende Fakultät

Definition 202

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\frac{x^{\underline{n}}}{x^{\underline{n+1}}} = \frac{1}{x-n}$.

Damit für $n = -1$ „formal“:

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

Und für n ersetzt durch $-n$:

$$x^{\underline{-n}} = \frac{x^{\underline{-n+1}}}{x+n}$$

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

$$x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}$$

Lemma 203

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $$\Delta x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2. $$\nabla x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}$$

Beweis:

(Wir zeigen nur 1.)

- $n > 0$:

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)\cdot x^{\underline{n-1}} - (x-n+1)\cdot x^{\underline{n-1}}\\ &= n\cdot x^{\underline{n-1}}\end{aligned}$$

- $n = 0$:

$$\Delta x^{\underline{0}} = (x+1)^{\underline{0}} - x^{\underline{0}} = 0 = 0\cdot x^{\underline{-1}}$$

Beweis (Forts.):

- $n < 0$. Setze $m := -n$:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-m}} &= (x+1)^{\underline{-m}} - x^{\underline{-m}} \\
&= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} \\
&= -m \cdot x^{\underline{-m-1}}
\end{aligned}$$

$\square$

4.8.4 Diskrete Stammfunktion

Definition 204

Sei f so, dass $\Delta f = g$. Dann heißt f eine diskrete Stammfunktion von g. Schreibweise: $f = \sum g$.

Satz 205

Sei f eine diskrete Stammfunktion von g. Dann gilt:

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = f(b+1) - f(a)$$

Beweis:

Wegen $\Delta f = g$ gilt $g(i) = f(i+1) - f(i)$, also

$$\sum_{i=a}^{b} g(i) = \sum_{i=a}^{b} (f(i+1) - f(i)) = f(b+1) - f(a).$$

$\square$

Beispiel 206

$$\sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}$$

für $n \neq -1$.

Beispiel 207

Sei

$$f(x) := \sum x^{\underline{-1}}\,.$$

Dann ist (für $x \in \mathbb{N}$)

$$f(x+1) - f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + f(x-1) = \ldots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{1} + f(0)$$

Wir setzen o. B. d. A. $f(0) = 0$, damit

$$f(x) = H_x$$

(harmonische Reihe).

Beispiel 208

Es ist $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1) \cdot a^x$.

$$\Delta \frac{a^x}{(a-1)} = a^x,$$

bzw.

$$\sum a^x = \frac{a^x}{(a-1)} + C$$

Beispiel 209

Was ist $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$? Es gilt:

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \left(\sum x^{\underline{2}} + \sum x^{\underline{1}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 210

Es ist

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}} \,,$$

wie wir aus der in Abschnitt 4 (Folie 276) hergeleiteten Formel sehen, wenn wir bedenken, dass diese Formel (zunächst) für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, die obige Gleichung also eine polynomielle Identität darstellt.

Beispiel (Forts.)

Also:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \left(\sum x^m\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \left(\sum \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot x^{\underline{k}}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\sum x^{\underline{k}}\right)\Big|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} S_{m,k} \cdot \left(\frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{S_{m,k}}{k+1}(n+1)^{\underline{k+1}}\,.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich ein Polynom in n *vom Grad* $m+1$.

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) \\
&\quad \underbrace{-f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\
&= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\
&= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x)\ .
\end{aligned}$$

□

Bemerkung zur Notation:
Bei der Darstellung

$$\sum(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1}\\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}\,.\end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Bigg|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Bigg|_{x=1}^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0 \,.
\end{aligned}$$