

6.2 Dijkstras Algorithmus für sssd

Gegeben sind ein (Di)Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $s \in V$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

algorithm Dijkstra

$F := V \setminus \{s\}$

for all $v \in F$ do $d[v] := w(s, v)$ od

co $d[s] = 0$ oc

while $F \neq \emptyset$ do

bestimme $v \in F$ mit $d[v]$ minimal

$F := F \setminus \{v\}$

for all $w \in N(v)$ do

$d[w] := \min\{d[w], d[v] + w(v, w)\}$

od

od

end

Satz 316

Dijkstras Algorithmus berechnet $d(s, v)$ für alle $v \in V$; der Zeitaufwand ist $O(n^2)$, der Platzbedarf $O(n + m)$.

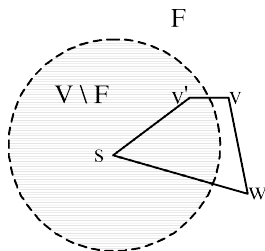
Beweis:

Zeit- und Platzbedarf sind aus dem Algorithmus ersichtlich. Die Korrektheit zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis:

Annahme: v sei der erste Knoten, so dass $d(s, v)$ falsch (d. h. zu groß) berechnet wird.

Beweis (Forts.):

Diese Situation illustriert folgendes Bild:



Nach Annahme muss dann gelten:

$$d(w) + w(w, v) < d(s, v') + w(v', v) = d(v) .$$

Damit wäre $d(w)$ aber kleiner als $d(v)$, und der Algorithmus hätte w und nicht v gewählt. □

Bemerkung:

Mit besseren Datenstrukturen (**priority queues** – z. B. **Fibonacci heaps**) kann Dijkstras Algorithmus so implementiert werden, dass er z. B. in Zeit $O(m + n \cdot \log n)$ läuft.


7. Matchings


Definition 317

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- 1 $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls alle Kanten in M paarweise disjunkt sind.
- 2 M heißt **maximales Matching**, falls es kein Matching M' in G gibt mit $M \subsetneq M'$.
- 3 M heißt **Matching maximaler Kardinalität** (aka **Maximum Matching**), falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt.
- 4 $m(G)$ ist die Kardinalität eines Maximum Matchings in G .

Beispiel 318

 maximales Matching
(aber nicht Maximum)

 Maximum-Matching
(natürlich auch maximal)

7.1 Matchings in bipartiten Graphen

Satz 319 („Heiratssatz“)

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann ist $m(G) = |U|$ genau dann, wenn gilt:

$$(\forall A \subseteq U) [|A| \leq |N(A)|]$$

Beweis:

„ \Rightarrow “

Offensichtlich.

„ \Leftarrow “

Sei M ein Maximum Matching in G .

Annahme: Ein Knoten $u = u_0 \in U$ sei in M ungematcht.

Wir beginnen in u_0 eine BFS, wobei wir in den ungeraden Schichten (also von U aus) nur ungematchte und in den geraden Schichten (also von V aus) nur gematchte Kanten verwenden. Querkanten bleiben außer Betracht.

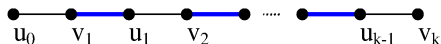
Fall 1: Die BFS findet in V einen ungematchten Knoten v . Dann stoppen wir.

Fall 2: Nach Vollendung einer geraden Schicht (mit gematchten Kanten) sind alle Blätter des BFS-Baums gematcht. Seien U' (bzw. V') die Knoten des aktuellen BFS-Baums in U (bzw. V). Gemäß Annahme ist $|U'| > |V'|$, die alternierende BFS kann also fortgesetzt werden. Da G endlich ist, muss schließlich Fall 1 eintreten.

Beweis (Forts.):

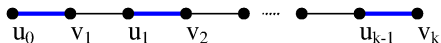
„ \Leftarrow “ (Fortsetzung)

Also existiert per Konstruktion ein Pfad wie in folgender Abbildung:



Ein solcher Pfad, bei dem sich gematchte und ungematchte Kanten abwechseln, heißt **alternierender** Pfad. Sind, wie hier, Anfangs- und Endknoten ungematcht, heißt der Pfad auch **augmentierend**.

Vertauscht man auf diesem Pfad gematchte und ungematchte Kanten, erhält man dadurch ein Matching M' mit $|M'| = |M| + 1$, was wiederum einen Widerspruch darstellt:



Definition 320

Man definiert für einen bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ die Kenngröße:

$$\delta := \delta(G) := \max_{A \subseteq U} \{|A| - |N(A)|\}$$

Da bei der Maximumsbildung auch $A = \emptyset$ sein kann, ist $\delta \geq 0$.

Satz 321

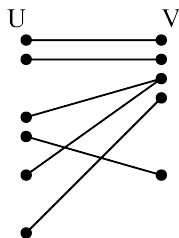
Es gilt:

$$m(G) = |U| - \delta .$$

Beweis:

Dass $m(G) \leq |U| - \delta$ gilt, ist offensichtlich. Wir zeigen nun noch, dass auch $m(G) \geq |U| - \delta$ gilt, damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte folgenden Graphen:



Man fügt nun δ neue Knoten hinzu. Von diesen gehen Kanten zu allen Knoten in U , so dass ein $K_{|U|,\delta}$ entsteht.

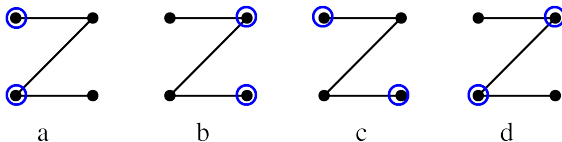
Beweis (Forts.):

Der neue Graph erfüllt die Voraussetzungen des Heiratssatzes. Damit gibt es im neuen Graphen ein Matching M' mit $|M'| = |U|$. Daraus folgt, dass es im alten Graphen ein Matching der Kardinalität $\geq |U| - \delta$ geben muss. \square

Definition 322

$D \subseteq U \uplus V$ heißt **Träger** oder **Knotenüberdeckung** (*vertex cover, VC*) von G , wenn jede Kante in G zu mindestens einem $u \in D$ inzident ist.

Beispiel 323



In den Fällen a, b und d sind Träger gezeigt, in c nicht.

Satz 324

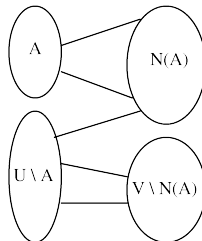
Es gilt:

$$\max\{|M|; M \text{ Matching}\} = \min\{|D|; D \text{ Träger}\}$$

Beweis:

„ \leq “ Offensichtlich.

„ \geq “ Für ein geeignetes $A \subseteq U$ gilt $m(G) = |U| - \delta(G) = |U \setminus A| + |N(A)|$:



$(U \setminus A) \cup N(A)$ ist Träger von G .



Sei

$$M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

eine (quadratische) Matrix mit $m_{ij} \geq 0$. Alle Zeilen- und Spaltensummen von M seien gleich $r > 0$.

Man ordnet nun M den bipartiten Graphen $G = (U, V, E)$ zu mit

$$U = \{u_1, \dots, u_n\}, V = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ und } \{u_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow m_{ij} > 0.$$

Ein Matching in G entspricht einer Menge von Positionen in M , die alle in verschiedenen Zeilen und Spalten liegen.

Beispiel 325

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{3} \\ 2 & \boxed{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Graphen

