WS 2011/12

Diskrete Strukturen

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/uebung/

2. November 2011

ZÜ II

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Anmeldung zu Gruppen, Fragen
2. Themen: Überführung von Aussagen in Beweise
   Prädikatenlogik und Normalformen
   Beweisarten, insbesondere Induktionsbeweis
3. Vorbereitung: auf TA's Blatt 3:

1. Übungsbetrieb

1.1 Stand der Anmeldungen

Bioinformatiker bitte in Übungsgruppen anmelden!

1.2 Fragen

Fragen zum Übungsbetrieb?

2. Thema: Überführung von Aussagen in Beweise

Der aussagenlogische Ausdruck

$$A \Rightarrow B$$ Implikation

kann bewiesen werden durch

Annahme: Es gilt A.
Dann wird B bewiesen. Inferenz

Analog: Beweis eines prädikatenlogischen Ausdrucks $\forall x\, P(x)$.

Aussagen können durch Verfahren (Vorgänge) interpretiert (bewiesen) werden und umgekehrt.

3. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 3

3.1 Thema: Prädikatenlogik und Normalformen

Wiederholung Aussagenlogik:

Aussage

Wahrheitswert

Aussagenlogischer Ausdruck, Formel, Strukturbaum

Aussagenkalkül

Aussagenvariable

Junktor, Aussagenverbindung, Aussagenfunktion

Wahrheitsfunktion, Belegung

Formale Semantik der Aussagenlogik

Wiederholung Prädikatenlogik:

Aussageform (mit freien Variablen für Individuen)

Spezialisierung und Quantifizierung von Variablen

Quantifizierte Variablenvorkommen

Prädikat, Prädikatsymbol, Prädikatvariable

Stelligkeit von Prädikaten

Prädikatenlogische Formel, Prädikatenkalkül

Attribute: Eigenschaft, Relation,

Formale Semantik einer Formel, Interpretation

Weitere Begriffe:

Logische Äquivalenz

Tautologie

Widerspruch

Normalformen:

Aussagenlogische Formel:	Disjunktive Normalform
Aussagenlogische Formel:	Konjunktive Normalform
Prädikatenlogische Formel:	Pränexe Normalform

Bemerkung: Für alle Formeln lassen sich entsprechende, logisch äquivalente Normalformen herleiten.

3.2 VA 1, Prädikatenlogik

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate P und Q die folgende Aussage gilt:

$$(\exists x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

Lösung:

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Formel zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage

$$(\exists x)[P(x)]\,.$$

Deshalb können wir von einem $a \in \mathbb{R}$ mit Eigenschaft $P(a)$ als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem a ist allerdings nur bekannt, dass $P(a)$ gilt.

Sei also $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $P(a)$.

Da die Aussage

$$(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte a, dass die Aussage

$$[P(a) \Rightarrow Q(a)]$$

gilt.

Es gelten also die beiden Aussagen $P(a)$ und $[P(a) \Rightarrow Q(a)]$.

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass

$$Q(a)$$

gilt.

Da wir nun sozusagen ein Element a konstruiert haben, für das $Q(a)$ gilt, haben wir bewiesen, dass die Aussage

$$(\exists x)[Q(x)]$$

gilt. W.z.b.w.

2. Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$(\forall x\ \exists y\ \forall z)\,[P(x,y,z)]\,.$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu

$$\neg F$$

äquivalent ist.

Lösung:

Wenn *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ gilt,
dann ist dies gleichbedeutend damit, dass

für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ *nicht* gilt.

Für alle Formeln $(\forall x)[Q(x)]$ gilt also

$$\neg(\forall x)[Q(x)] \equiv (\exists x)[\neg Q(x)]\,.$$

Achtung: die Formel $\neg(\forall x)[Q(x)]$ ist nicht in pränexer Form.

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf $\neg F$ an wie folgt.

$$
\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg(\forall x)\ [\exists y\ [\forall z\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\neg(\exists y)\ [\forall z\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\forall y\ [\neg(\forall z)\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\forall y\ [\exists z\ [\neg P(x,y,z)]]] \\
&\equiv (\exists x\ \forall y\ \exists z)\ [\neg P(x,y,z)]\,.
\end{aligned}
$$

3.3 VA 2, Beweisarten

1. *Direkter Beweis*:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \; = \; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \; + \; m \cdot b\right) .$$

Bemerkung:

Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen,
und zwar das jeweilige „neutrale“ Element der Operation,
d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor,
wenn der Laufindex i bei i_0 beginnt, aber $n < i_0$ gilt,
d. h. wir setzen $i_0 \leq i \leq n$ voraus.

Lösung:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert.

Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) &= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \\
&= \frac{1}{n+m}\left(1 + \frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n+m}\left(\frac{n+m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \,.
\end{aligned}
$$

2. *Indirekter Beweis*:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie:

   Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k + 1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Hamster befinden.

Lösung:

Die Voraussetzung $m > n \cdot k$ bezeichnen wir als Aussage A.

Wir bezeichnen die Anzahl der in Käfig i $(1 \leq i \leq n)$ befindlichen Hamster als h_i.

Zu zeigen ist dann die Aussage B mit

$$B = (\exists i, 1 \leq i \leq n)\ [h_i \geq k + 1]\,.$$

Insgesamt haben wir also die Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen.

Indirekter Beweis:
Wir zeigen die Kontraposition von $A \Rightarrow B$, d. h.

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

.

Annahme: Es gelte $\neg B$, d. h., für alle i gelte $h_i < k + 1$.

Wegen $h_i \leq k$ schätzen wir die Gesamtzahl m aller Hamster in den Käfigen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^{n} h_i \leq \sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k\,.$$

Damit ist die Negation der Voraussetzung $m > n \cdot k$ gezeigt, mithin Aussage $\neg A$.

3. *Schubfachprinzip*:

   Lassen sich obige Aussagen auch mit dem „Schubfachprinizip“ beweisen?

Antwort:

Das Schubfachprinzip beweist eine Existenzaussage ohne Konstruktion eines bestimmten Elements, wie z.B.:

Es gibt einen Käfig, in dem mehr als k Hamster sitzen.

Die Teilaufgabe 2 kann sehr gut mit dem Schubfachprinzip bewiesen werden.
Dazu definiert man eine Abbildung f, die die Menge der m Hamster in die Menge der n Käfige abbildet.

Aussagen der Art, dass ein Beweis mit einer bestimmten Struktur nicht existiert, sind im Allgemeinen falsch.

Trotzdem bietet sich für den erstgenannten direkten Beweis keine Anwendung des Schubfachprinzips an, weil er auf keine derartige Existenzaussage abzielt.

Teilaufgabe 1 ist für die Anwendung des Prinzips nicht geeignet.

3.4 Thema: Induktionsbeweis

Mit einem Induktionsbeweis beweist man den Wahrheitswert einer aufgezählten Menge von Aussagen

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

durch eine Aufzählung der Beweise B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots .$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen,
d.h. A_1, und eine Folgerung $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i.

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n.

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist aufsteigend unendlich.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,. \tag{2}$$

Bemerkung: Das Prädikat $P(n)$ ist nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang : Es gilt $P(1)$:

...

Induktionsschritt : Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss : Dann gilt $P(n+1)$:

...

Soweit das Schema des Induktionsbeweises.

3.5 VA 3, Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m \,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem angegebenen Schema durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$ genau dann wahr ist, wenn $1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad 1 + (n-1)x \leq (1+x)^{n-1}\,.$$

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)]\,.$$

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
$P(1)$ bedeutet
$1 + 0 \cdot x \leq (1+x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Es gilt $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)^{n-1}(1+x) \\
&\geq (1+(n-1)x)(1+x) \qquad \text{I.A. } P(n) \\
&= 1+(n-1)x+x+(n-1)x^2 \\
&\geq 1+nx\,. \qquad \text{w.z.b.w.}
\end{aligned}$$