WS 2011/12

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011WS/ds/uebung/

30. November 2011

ZÜ VII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Tipps: Hin.Ti's für HA Blatt 7
3. Zusatzaufgabe: als Rechenübung
4. Vorbereitung: auf TA Blatt 7:
   Polynomdivision (VA1)
   Partialbruchzerlegung (VA2)
   Komplexe Zahlen (VA3)

1. Übungsbetrieb

Fragen?

Zusatzaufgabe Blatt 6: Es gab einige schöne Lösungen. Diese werden momentan augewertet.

2. Tipps zu HA Blatt 7

ad HA 2:

Zum Beweis jeder der drei Teilaufgaben könnte man zunächst die allgemeine Implikation

$$f \in o(g) \implies g \notin O(f)$$

beweisen, um dann mit Vorteil das Limeskriterium für Wachstum $f \in o(g)$ zu verwenden.

Aber: Überlegen Sie sich auch den direkten Beweis einer Eigenschaft $g \notin O(f)$ mit prädikatenlogischer Verneinung analog TA 1, Blatt 3.

ad HA 3.2:
Weiterer Hinweis:

Es gilt:
Der Logarithmus $\ln n$ wächst schwächer als jede Potenz n^r für positive $r \in \mathbb{R}$.

Deshalb gilt für genügend große n die Ungleichung

$$\ln n \leq \frac{n^{\frac{c}{2}}}{2}.$$

3. Zusatzaufgabe als Rechenübung

Machen Sie sich mit dem elementaren Rechnen mit Matrizen und Determinanten vertraut und informieren Sie sich ggf. anhand geeigneter Quellen der Linearen Algebra bzw. Höheren Mathematik.

Der Wert von Determinanten ändert sich nicht bei elementaren Zeilen- oder Spaltenumformungen.

4. Vorbereitung auf TA Blatt 7

4.1 VA 1, Polynomdivision

Mit $R = \mathbb{Z}_3[x]$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ der ganzen Zahlen modulo 3.
Seien $a(x), b(x) \in R$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,, \\ b(x) &= x^3 + x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in R$ mit $\mathrm{grad}(r_3(x)) < \mathrm{grad}(r_2(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= a(x) - q_1(x) \cdot b(x)\,, \\ r_3(x) &= b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x)\,. \end{aligned}$$

Lösung:

$q_1(x)$ erhält man durch Division von $a(x)$ durch $b(x)$ mit Rest $r_2(x)$.
Ausführung der Division:

$$
\begin{array}{rlcl}
\overbrace{x^6+2x^4+2x^3+x^2+1}^{a(x)} & (\mathrm{div})\ \overbrace{x^3+x^2+1}^{b(x)} & = & x^3 \\
-\ (x^6+x^5+x^3) & & & \\
\hline
-x^5+2x^4+x^3+x^2+1 & & & -x^2 \\
-\ (-x^5-x^4-x^2) & & & \\
\hline
x^3+2x^2+1 & & & +1 \\
\cline{4-4}
-\ (x^3+x^2+1) & q_1(x) & = & x^3+2x^2+1 \\
\hline
x^2 = & r_2(x) & &
\end{array}
$$

Entsprechend erhält man $q_2(x)$
durch Division von $b(x)$ durch $r_2(x)$ mit Rest $r_3(x)$.

$$\begin{aligned}
a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,,\\
b(x) &= x^3 + x^2 + 1\,,\\
q_1(x) &= x^3 + 2x^2 + 1\,,\\
r_2(x) &= x^2\,,\\
q_2(x) &= x + 1\,,\\
r_3(x) &= 1\,.
\end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t(x) \in R$ möglichst hohen Grades, das ein gemeinsamer Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ ist.

Lösung:

Gesucht ist also der größte gemeinsame Teiler von $a(x)$ und $b(x)$.

Das gesuchte Polynom ist $t(x) = r_3(x) = 1$.

Begründung:
$b(x)$ ist nicht durch $r_2(x)$ ohne Rest teilbar.
Aber $r_2(x)$ ist ohne Rest durch $r_3(x) = 1$ teilbar.

4.2 VA 2, Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie Polynome $a(x),\ b(x) \in \mathbb{Q}[x]$, so dass gilt

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{a(x)}{x^2+1} + \frac{b(x)}{x^2+2}\,.$$

Lösung:

Bringt man die Brüche der rechten Gleichungsseite auf einen gemeinsamen Nenner, so erhält man durch Vergleich der Zähler die Gleichung

$$a(x)(x^2+2)+b(x)(x^2+1)=x^2+x\,.$$

Zur Lösung der Gleichung wählen wir den Ansatz

$$a(x)=a_1x+a_0 \quad \text{und} \quad b(x)=b_1x+b_0$$

und erhalten

$$\begin{aligned} &a(x)(x^2+2)+b(x)(x^2+1)\\ &\quad = \; a_1x^3+a_0x^2+2a_1x+2a_0+b_1x^3+b_0x^2+b_1x+b_0\\ &\quad = \; (a_1+b_1)x^3+(a_0+b_0)x^2+(2a_1+b_1)x+(2a_0+b_0)\,. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich gewinnt man

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0\,, \\ a_0 + b_0 &= 1\,, \\ 2a_1 + b_1 &= 1\,, \\ 2a_0 + b_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösung ist

$$a_1 = 1,\; a_0 = -1,\; b_1 = -1,\; b_0 = 2\,.$$

4.3 VA 3, Komplexe Zahlen

Wir betrachten den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.
Es sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine multiplikative Untergruppe W_n von $\mathbb{C}$ erzeugt, die isomorph ist zu $\mathbb{Z}_n$.

2. Stellen Sie W_n in der Gaußchen Zahlenebene dar und machen Sie sich klar, was in Ihrer Darstellung die Multiplikation in W_n bedeutet.

Lösung:

$\mathbb{C}$ ist zusammen mit der Multiplikation keine Gruppe.

Gleichwohl gibt es Teilmengen von $\mathbb{C}$, die zusammen mit der Multiplikation eine Gruppe bilden. Wir sprechen in diesem Fall von multiplikativen Untergruppen von $\mathbb{C}$.

Eine maximale multiplikative Untergruppe in $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trivialerweise bildet auch $\{0\}$ zusammen mit der Multiplikation eine Untergruppe.

Eine multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}$,
die irgendein von 0 verschiedenes Element enthält,
kann die 0 nicht enthalten.

Wegen $e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 0$ sind deshalb die

von $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ erzeugten multiplikativen Untergruppen

gleichzeitig Untergruppen der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sei

$$W_n = \{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^k \,;\, k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

W_n ist die von $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ erzeugte (zyklische) multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nun gilt

$$W_n = \{e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{2(2\pi i)}{n}}, \ldots, e^{\frac{k(2\pi i)}{n}}, \ldots, e^{\frac{n(2\pi i)}{n}} = 1\}\,.$$

Die Abbildung

$$\phi(e^{\frac{k(2\pi i)}{n}}) = k \bmod n$$

ist eine Isomorphie von W_n auf $\mathbb{Z}_n$ wegen

$$\begin{aligned}
\phi(x \cdot y) &= \phi(e^{\frac{k_x(2\pi i)}{n}} e^{\frac{k_y(2\pi i)}{n}}) \\
&= \phi(e^{\frac{(k_x+k_y)(2\pi i)}{n}}) \\
&= (k_x + k_y) \bmod n \\
&= \phi(x) +_n \phi(y)\,.
\end{aligned}$$

In der Gaußchen Zahlenebene liegen die Elemente von W_n auf einem Kreis von Punkten mit Abstand 1 zum Nullpunkt.

Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $e^{\frac{k(2\pi i)}{n}}$

$$z \cdot e^{\frac{k(2\pi i)}{n}}$$

bedeutet dann eine Drehung des Vektors z um den Winkel $\frac{k(2\pi)}{n}$ im Gegenuhrzeigersinn (bei positivem k).

Eulersche e-Funktion:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi \ + \ i \cdot \sin\varphi \,.$$