Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 7
28. November 2011

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 6. Dezember 2011, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

1. Berechnen Sie $(10^{117} + 5^{27} - 30^{1000}) \bmod 3$.
2. Bestimmen Sie $2^{7333333100} \bmod 12$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Gilt die Mengengleichheit $O(n^2) = O(n^3)$? Beweisen Sie Ihre Aussage!
2. Wahr oder falsch: $2 \cdot 3^n \in O(3 \cdot 2^n)$? Beweisen Sie Ihre Antwort!
3. Sei $2^{O(n)} = \{2^{f(n)};\ f(n) \in O(n)\}$. Gilt $O(2^n) = 2^{O(n)}$? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass alle Polynome $p(x)$ beliebigen Grades für $x \to +\infty$ langsamer wachsen als e^x, d.h. $p(x) \in o(e^x)$.
2. Geben Sie eine Funktion $f(n)$ an, so dass für alle Polynome $p(n)$ beliebigen Grades $f(n) \in \omega(p(n))$ und gleichzeitig $f(n) \in o(2^{n^c})$ für alle positiven reellen Zahlen c gilt.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir fassen die aussagenlogischen Werte t (wahr) und f (falsch) zur booleschen Menge $\mathbb{B} = \{t, f\}$ zusammen und betrachten den aussagenlogischen Operator $\otimes : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ des „ausschließenden Oder" (gleichbedeutend mit $\not\equiv$).

1. Zeigen Sie die Kommutativität und die Assoziativität von $\otimes$, d.h. $x \otimes y \equiv y \otimes x$ und $(x \otimes y) \otimes z \equiv x \otimes (y \otimes z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{B}$, durch Auswertung der entsprechenden Wahrheitswerttabellen.
2. Wir betrachten die Algebra $A = \langle \mathbb{B}, \otimes \rangle$. Geben Sie einen Isomorphismus f von A auf $\langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle$ an und beweisen Sie die entsprechende Homomorphieeigenschaft für f.

   Warum folgt bereits aus der Existenz des Isomorphismus f die Kommutativität und Assoziativität der Verknüpfung $\otimes$? Beweis!

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Seien $G = \langle S, \circ, e\rangle$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $U = \{x \in S\,;\, x^2 = e\}$.
Man zeige:

1. Sei G abelsch. Dann ist $\langle U, \circ\rangle$ eine Untergruppe von G.

2. Falls $U = S$ gilt, dann ist G abelsch.

Zusatzaufgabe (Rechenübung ohne Abgabe)

Machen Sie sich mit dem elementaren Rechnen mit Matrizen und Determinanten vertraut und informieren Sie sich ggf. anhand geeigneter Quellen der Linearen Algebra bzw. Höheren Mathematik.

1. Werten Sie die folgenden Matrixprodukte aus (Ergebnis als Matrix):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Werten Sie den folgenden Ausdruck aus (Ergebnis als Matrix):

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem für $x_i \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnen Sie für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ die Vandermondesche Determinante Δ als Produkt von Differenzen der x_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Mit $R = \mathbb{Z}_3[x]$ bezeichnen wir den Ring aller Polynome über einer Variablen x mit Koeffizienten aus dem Körper $\langle \mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3 \rangle$ der ganzen Zahlen modulo 3.
Seien $a(x), b(x) \in R$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a(x) &= x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1\,, \\ b(x) &= x^3 + x^2 + 1\,. \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie Polynome $r_2(x), r_3(x), q_1(x), q_2(x) \in R$ mit $\mathrm{grad}(r_3(x)) < \mathrm{grad}(r_2(x)) < \mathrm{grad}(b(x))$, so dass die folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} r_2(x) &= a(x) - q_1(x) \cdot b(x)\,, \\ r_3(x) &= b(x) - q_2(x) \cdot r_2(x)\,. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie ein Polynom $t(x) \in R$ möglichst hohen Grades, das ein gemeinsamer Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ ist.

Vorbereitung 2

Bestimmen Sie Polynome $a(x),\ b(x) \in \mathbb{Q}[x]$, so dass gilt

$$\frac{x^2 + x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{a(x)}{x^2+1} + \frac{b(x)}{x^2+2}\,.$$

Vorbereitung 3

Wir betrachten den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Es sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine multiplikative Untergruppe W_n von $\mathbb{C}$ erzeugt, die isomorph ist zu $\mathbb{Z}_n$.

2. Stellen Sie W_n in der Gaußchen Zahlenebene dar und machen Sie sich klar, was in Ihrer Darstellung die Multiplikation in W_n bedeutet.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, d. h. Polynome p, q in einer Unbestimmten (Variablen) x und Koeffizienten aus dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 2x - 6\,, \\ q(x) &= x^3 + 3x^2 + x + 3\,. \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie mit dem Euklidschen Algorithmus ein Polynom möglichst hohen Grades, das sowohl Teiler von $p(x)$ als auch Teiler von $q(x)$ ist ($\mathrm{ggT}(p, q)$).

2. Die Abbildung $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ sei gegeben durch $m(x) := x \bmod 2$. Dann erhalten wir aus $p(x)$ das Polynom

$$\hat{p}(x) = m(1)x^5 + m(-3)x^4 + m(3)x^3 + m(-9)x^2 + m(2)x + m(-6)\,.$$

   Stellen Sie $\hat{p}$ im Ring $\mathbb{Z}_2[x]$ als Produkt einer geeigneten Anzahl von Linearfaktoren $x - \alpha_i$, mit geeigneten Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dar.

Tutoraufgabe 2

Bestimmen Sie mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + 10$ und $x^2 - 1$. Die Polynome werden im Ring $\mathbb{Q}[x]$ betrachtet.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei der Bruch $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit den Polynomen $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$,

$$p(x) = 3x^3 - 52x + 16 \quad \text{und} \quad q(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 4x - 48\,.$$

1. Man bestimme einen größten gemeinsamen Teiler $r(x)$ von $p(x)$ und $q(x)$ und dividiere Zähler und Nenner von $f(x)$ durch $r(x)$. Das Ergebnis nennen wir den vollständig gekürzten Bruch $F(x)$.

2. Bestimmen Sie die vollständige Partialbruchzerlegung von $F(x)$, d. h., berechnen Sie $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C \in \mathbb{C}$ so, dass gilt

$$F(x) = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x+\beta} + \frac{C}{x+\gamma}\,.$$