
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: Jeweilige Tutorübung

Tutoraufgabe 1

In der Vorlesung wurde der Pledge-Algorithmus beschrieben, der es einem erlaubt, in endlicher Zeit aus einem Labyrinth zu entkommen, sofern es einen erreichbaren Ausgang gibt.

- Beweisen Sie formal die Korrektheit des Algorithmus.
- Wie kann der Algorithmus modifiziert werden, sodass er auch bei Labyrinthfunktionen, bei denen die Wände in beliebigen Winkeln zueinander stehen können?

Tutoraufgabe 2

Beweisen Sie die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} ic^i = \frac{c}{(1-c)^2}$ für $|c| < 1$ jeweils durch die folgende Methode:

- Zeigen Sie die Gleichheit $\sum_{i=1}^n ic^i = \frac{nc^{n+2} - (n+1)c^{n+1} + c}{(1-c)^2}$ per Induktion und führen Sie anschließend einen Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch.
- Verwenden Sie die Indexverschiebungsmethode.
- Verwenden Sie die Ableitungsmethode (i.e. ein Term unter einer Summe wird als Ableitung formuliert, anschließend wird Summe und Ableitung vertauscht).

Die Gleichheit $\sum_{i=1}^{\infty} c^i = \frac{c}{1-c}$ darf als bewiesen vorausgesetzt werden, sowie die Tatsache, dass $\sum_{i=1}^{\infty} ic^i$ eine konvergente Potenzreihe ist.

Tutoraufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$:

- $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
- $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,
- $19 \mid (5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$ (In Worten: 19 teilt $(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$),

wobei F_n die n -te Fibonaccizahl nach der rekursiven Definition $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ ist.

Hausaufgabe 1

Ein bekanntes Nimspiel ist wie folgt definiert. Gegeben ist eine Reihe von $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzern. Zwei Spieler, A und B , ziehen abwechselnd zwischen einem und $k \in \mathbb{N}$ Streichhölzern, wobei k eine vorher vereinbarte obere Schranke für die Anzahl der Streichhölzer ist, die pro Zug aus dem Spiel entfernt werden dürfen. Derjenige Spieler, der das letzte Streichholz nimmt, hat verloren.

Intuitiv ist die Annahme, dass der Spieler, der den ersten Zug hat, seinen Sieg für einige n durch eine geeignete Spielstrategie erzwingen kann und möglicherweise für einige andere n in einer Verlustposition ist, falls der zweite Spieler stets die richtigen Antworten findet, nicht zu gewagt. Wir nehmen im Folgenden an, dass Spieler A beginnt.

- Sei M_A die Menge aller n , für die Spieler A sicher gewinnen kann. Analog sei die Menge M_B definiert. Überlegen Sie sich, welche Zahlen in M_A und welche in M_B sind. Probieren Sie kleine Beispiele aus, um ein Gefühl für das Spiel zu gewinnen.
- Beweisen Sie formal, dass die von Ihnen in Teilaufgabe (a) gefundenen Mengen M_A und M_B die geforderten Eigenschaften besitzen. Verwenden Sie dazu vollständige Induktion über die Zahl n der Streichhölzer.
- Ihr Beweis induziert (bzw. enthält implizit) einen Algorithmus, der zu einer gegebenen Spielsituation einen gewinnenden Spielzug für den ersten Spielers ausgibt (sofern es sich unter der Annahme eines optimal spielenden zweiten Spielers um eine gewinnbare Spielsituation handelt). Geben Sie diesen Algorithmus an.

Hausaufgabe 2

Implementieren Sie obiges Nimspiel in Java. Der Benutzer soll die Anzahl n der Streichhölzer, die maximal erlaubte Zahl k an entfernbaren Streichhölzern pro Spielzug, sowie den ersten Spieler bestimmen können. Dann soll Ihr Programm gegen den Benutzer mit Ihrer oben definierten Gewinnstrategie spielen, sofern diese Strategie auf die aktuelle Streichholzzahl anwendbar ist. Falls die Spielsituation keine Gewinnstrategie für Ihr Programm erlaubt, soll die Zahl der gezogenen Streichhölzer zufällig sein.

Hausaufgabe 3

Die n -te Harmonische Zahl H_n ist definiert als

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Zeigen Sie mit Induktion, dass $1 + \frac{m}{2} \leq H_{2^m} \leq 1 + m$ gilt.

Anmerkung: Die harmonischen Zahlen spielen unter anderem in der Kombinatorik eine wichtige Rolle. Eine schöne Eigenschaft der n -ten harmonischen Zahl ist, dass sie sehr gut durch den natürlichen Logarithmus approximiert wird (und umgekehrt). Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$. Durch die Approximation von H_n durch $\ln n$ lassen sich Terme, die eine harmonische Zahl enthalten, oft in einfacher zu handhabende Terme überführen, ohne dabei viel an Präzision einzubüßen.

Hausaufgabe 4

Zeigen Sie mit Induktion, dass $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$ gilt.