

4. Die elementaren Zählfunktionen

4.1 Untermengen

Definition 165 (Binomialkoeffizienten)

align

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{n}{k} := 0 \quad n < k, n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{sonst} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

Satz 166

Sei N eine Menge mit $|N| = n$ Elementen. Die Menge aller k -elementigen Untermengen von N wird bezeichnet mit

$$\binom{N}{k}.$$

Es gilt:

$$\left| \binom{N}{k} \right| = \binom{|N|}{k} = \binom{n}{k}.$$

Beweis:

Seien $n, k \geq 0$, $a \in N$.

①

$\binom{n}{0}$ und $k > n$ sind klar.

② Definiere

$$S_a := \left\{ A \in \binom{N}{k}; a \in A \right\},$$

$$\tilde{S}_a := \left\{ A \in \binom{N}{k}; a \notin A \right\}.$$

Beweis (Forts.):

③ Damit gilt

$$S_a \cup \tilde{S}_a = \binom{N}{k}, \quad S_a \cap \tilde{S}_a = \emptyset.$$

$$|S_a| = \left| \binom{N \setminus \{a\}}{k-1} \right| = \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{per Induktion})$$

$$|\tilde{S}_a| = \left| \binom{N \setminus \{a\}}{k} \right| = \binom{n-1}{k} \quad (\text{per Induktion})$$

Daraus folgt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□

Zwischenbemerkung zur Nomenklatur:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)$$

4.2 Partitionen von Mengen und Zahlen

4.2.1 Ungeordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Sei N eine Menge der Kardinalität n und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Zerlegung von N in k nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen heißt eine k -Partition von N . Die einzelnen Teilmengen heißen auch **Klassen**. Ihre Anzahl wird mit

$$S_{n,k}$$

bezeichnet (die sog. **Stirling-Zahlen der 2. Art**).

Beispiel 167

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad k = 2$$

$$\begin{array}{ll} \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\} & \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \\ \{2\} \cup \{1, 3, 4, 5\} & \{1, 3\} \cup \{2, 4, 5\} \\ \{3\} \cup \{1, 2, 4, 5\} & \{1, 4\} \cup \{2, 3, 5\} \\ \{4\} \cup \{1, 2, 3, 5\} & \{1, 5\} \cup \{2, 3, 4\} \\ \{5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} & \{2, 3\} \cup \{1, 4, 5\} \\ & \{2, 4\} \cup \{1, 3, 5\} \\ & \{2, 5\} \cup \{1, 3, 4\} \\ & \{3, 4\} \cup \{1, 2, 5\} \\ & \{3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} \\ & \{4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{5,2} = 15.$$

Weiter gilt: $S_{n,1} = 1, S_{n,2} = \text{Übung}, S_{n,n} = 1.$

2. Zahlpartitionen

Sei

$$\mathbb{N}_0 \ni n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

mit $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Eine solche Zerlegung heißt ***k*-Partition** der Zahl n .

Die Anzahl aller *k*-Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ wird mit

$$P_{n,k}$$

bezeichnet.

Beispiel 168

$$n = 8, k = 4.$$

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1$$

$$= 4 + 2 + 1 + 1$$

$$= 3 + 3 + 1 + 1$$

$$= 3 + 2 + 2 + 1$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow P_{8,4} = 5$$

4.2.2 Geordnete Partitionen

1. Mengenpartitionen

Seien N, n, k wie vorher. Eine (beliebig) *geordnete* k -Menge $\subseteq N$ heißt k -Permutation aus N . Ihre Anzahl ist

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = n^{\underline{k}}$$

(„ n hoch k fallend“, „fallende Fakultät“).

Analog:

$$n^{\overline{k}} := n \cdot (n + 1) \cdots (n + k - 1)$$

Überlegung: Jede k -Menge aus N ergibt $k!$ k -Permutationen. Also

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^k$$

oder:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Eine k -Mengenpartition ergibt

$$k! \cdot S_{n,k}$$

geordnete k -Mengenpartitionen (Die Klassen sind (beliebig) *untereinander* geordnet, aber nicht *in sich!*).

2. Zahlpartitionen

Eine geordnete Zahlpartition ist gegeben durch

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \dots + n_k; \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:



Wähle aus den $n - 1$ Trennstellen $k - 1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k -Zahlpartition und umgekehrt.

Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

4.3 Multimengen

Beispiel 169

$$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \quad |M| = 7$$

Satz 170

Die Anzahl der k -Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\bar{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\bar{k}}}{k!}.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $N = \{1, \dots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ der Kardinalität k . Sei o.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Definiere die Ersetzung f :

$$f : \begin{array}{ccc} a_1 & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & a_2 + 1 & \\ a_3 & a_3 + 2 & \\ \vdots & \vdots & \\ a_k & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter f ist eine Menge $\subseteq [n + k - 1]$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. □

Andere Beweisvariante:

Beweis:

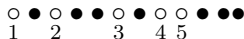
$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & & 0 & 2 & & & & & 1 & 0 \\ \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \dots & \circ & \bullet & \circ \\ 1 & 2 & & 3 & 4 & & & & & n-1 & n \end{array}$$

Von $n + k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). □

Beispiel 171

Darstellung zu obigem Beispiel:



Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\}$$

4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (Urbildraum) nach R (Bildraum), $|N| = n, |R| = r$ mit $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$r^n.$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$r^{\underline{n}}.$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \rightarrow R$ („geordnete r -Mengenpartitionen von N “) ist

$$r! \cdot S_{n,r}.$$