WS 2012/13

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

14. November 2012

# ZÜ IV

**Übersicht**:

1. Übungsbetrieb: Fragen, Probleme?
2. Thema: Zirkuläre Operationen
3. Vorbereitung auf TA Blatt 5:

   Rechnen modulo $m$ (VA 1)
   Darstellung zirkulärer Operationen (VA 2)
   Beispiel einer Gruppenalgebra (VA 3)
   Gruppen und Untergruppen (VA 4)

# 1. Übungsbetrieb

## 1.1 Fragen, Probleme?

?

# 2. Thema

## 2.1 Zirkuläre Operationen

Beispiel:
Operation $(+1)$ auf $\{0,1,2,3\}$:

$$
\begin{aligned}
&0,\\
0+1&=1,\\
1+1&=2,\\
2+1&=3,\\
3+1&=0,\\
0+1&=1,\\
1+1&=2,\\
2+1&=3,\\
3+1&=0,\\
\ldots&\quad \text{usw.}
\end{aligned}
$$

## Bemerkung:

Wesentliche Teile der Algebra werden von zirkulären Operationen beherrscht,
beispielsweise in Form der Potenzierung $a^m$, falls $a^m = 1$ gilt.

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots,\ a^{m-1},\ a^m = 1,\ a,\ a^2,\ \ldots.$$

Zirkuläres Rechnen ist eine Rechnungsart, die über die Schulmathematik hinausgeht.

## Rechnen modulo $m$

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man

kongruent modulo $m$, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z.

$$a \equiv b \pmod{m},$$

falls sich $a$ und $b$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $m$ unterscheiden, d. h.,

falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt

$$a = b + k \cdot m .$$

Man schreibt auch $a \equiv_m b$ für $a \equiv b \pmod{m}$.
$\equiv_m$ ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$,
ja sogar eine „Kongruenzrelation“.

Davon abgeleitet ist die Definition der Operation $\mathrm{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$b = a \bmod m \iff a \equiv b \pmod{m} \text{ und } 0 \leq b < m\,.$$

Für jedes $m$ ist $\bmod m$ eine unäre Operation über $\mathbb{Z}$.

$a \bmod m$ heißt Rest der natürlichen Division von $a$ durch $m$.

Achtung: Wir werden in der nächsten Zentralübung ein Quiz für zirkuläres Rechnen veranstalten. Lernen Sie also die folgende VA 1.

# 3. Vorbereitung auf TA Blatt 5

## 3.1 VA 1, Rechnen modulo $m$

Teil 1:

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv a \bmod m \pmod{m}, \tag{1}$$

$$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m, \tag{2}$$

$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m. \tag{3}$$

1. Zu beweisen ist: $a \equiv a \bmod m \pmod m$

Lösung:

Die Kongruenz modulo $m$ ist definiert durch

$$x \equiv y \pmod m \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,x = y + k{\cdot}m\,]\,.$$

Nach Definition von $(a \bmod m)$ gilt für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$

$$a \bmod m = a + k{\cdot}m\,, \quad \text{d. h.} \quad a = a \bmod m + k'{\cdot}m\,,$$

mithin

$$a \equiv a \bmod m \pmod m\,.$$

2. Zu beweisen ist:
$$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,.$$

Lösung:

Wir setzen linke Seite bzw. rechte Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} x &:= (a+b) \bmod m\,, \\ y &:= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,. \end{aligned}$$

und zeigen $x = y$.

Es gilt $0 \leq x, y < m$ und

$$\begin{aligned} x &= a + b + k_x \cdot m\,, \\ y &= (a \bmod m) + (b \bmod m) + k_y \cdot m\,, \\ (a \bmod m) &= a + k_a \cdot m\,, \\ (b \bmod m) &= b + k_b \cdot m \end{aligned}$$

für gewisse $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$ und es folgt

$$\begin{aligned} y &= a + k_a \cdot m + b + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x - k_x \cdot m + k_a \cdot m + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x + (k_a + k_b + k_y - k_x) \cdot m \\ &= x + k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq x, y < m$ folgt $x = y$.

Analog verläuft der Beweis der Gleichung 3:

$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m \,.$$

## Teil 2:

In enger Beziehung zur $\mathrm{mod}$-Operation steht die ganzzahlige Division $a \operatorname{div} m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$a = (a \operatorname{div} m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

Berechnen Sie:

(i) $5 \operatorname{div} 4$, (ii) $(-5) \operatorname{div} 4$, (iii) $(-x) \operatorname{div} 1$.

(i) $5$ div $4$:

Seien $a = 5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$(5 \operatorname{div} 4) \cdot 4 \;=\; 5 - (5 \bmod 4) \;=\; 5 - 1 \;=\; 4\,.$$

Es folgt $5 \operatorname{div} 4 = 1$.

## (ii) $(-5)$ div $4$:

Seien $a = -5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} ((-5) \operatorname{div} 4) \cdot 4 &= -5 - ((-5) \bmod 4) \\ &= (-5 - ((-5 + 8) \bmod 4)) \\ &= (-5 - 3) = -8\,. \end{aligned}$$

Es folgt $(-5) \operatorname{div} 4 = -2$.

## (iii) $(-x)$ div 1:

Seien $a = -x$ und $m = 1$.

Dann gilt

$$((-x) \operatorname{div} 1) \cdot 1 \;=\; -x - ((-x) \bmod 1) \;=\; -x - 0 \;=\; -x\,.$$

Es folgt $(-x) \operatorname{div} 1 = -x\,.$

## 3.2 VA 2, 3-D Darstellung der $\mathrm{mod}$-Operation

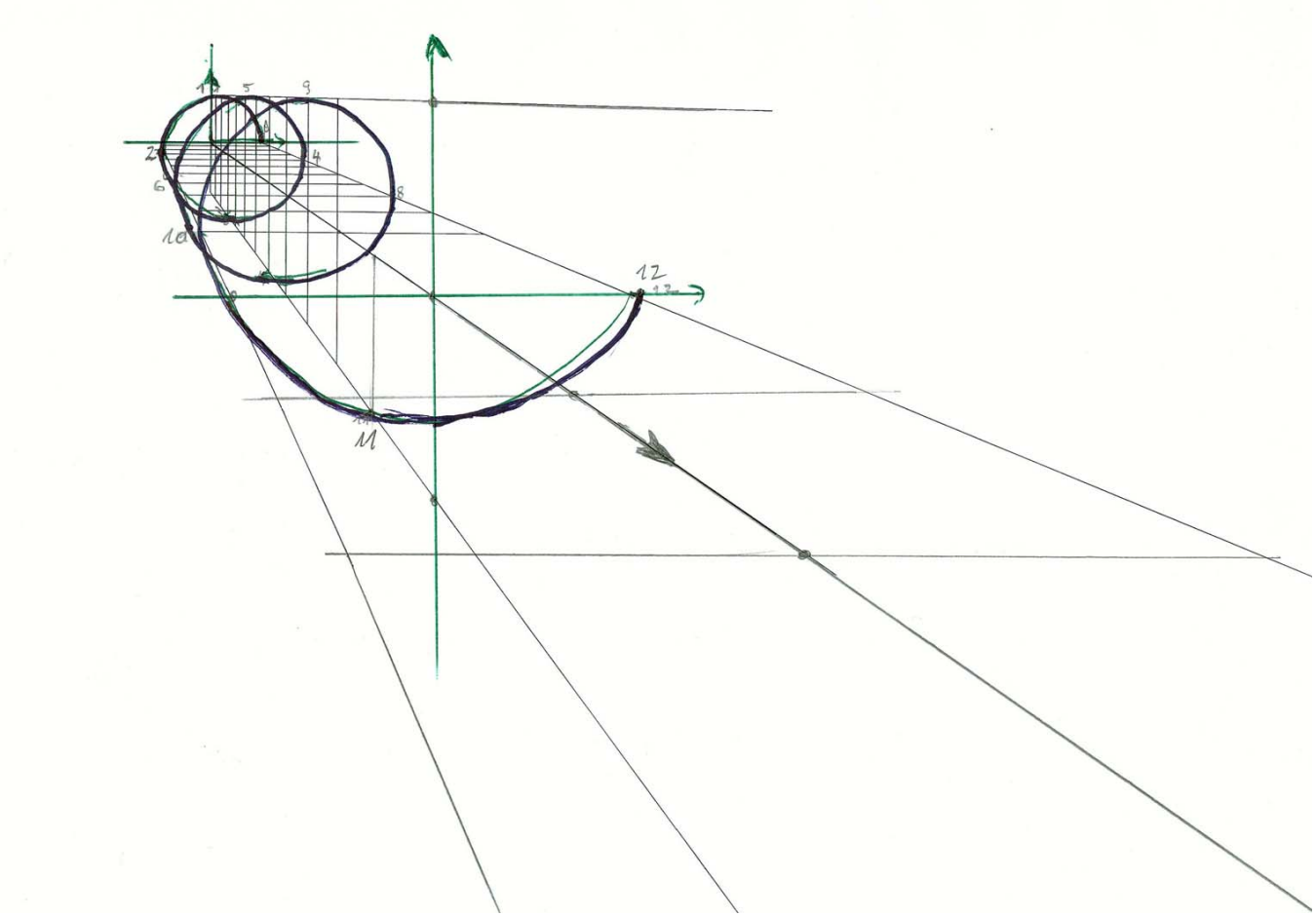
Die Operation $g \bmod m$ mit $m \in \mathbb{N}$ über den ganzen Zahlen $g \in \mathbb{Z}$ eröffnet den Zugang zu zirkulären Operationen.

Für $m = 4$ betrachten wir die folgende Abbildung $f_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ für alle $g \in \mathbb{Z}$:

$$f_4(g) = (g, i^{(g \bmod 4)}) .$$

Entwickeln Sie für den Bereich $g \in [-1, 6]$ mit Hilfe der Gauß'schen Ebene der komplexen Zahlen eine 3-dimensionale graphische Darstellung von $f_4$.

# Darstellung:



## 3.3 VA 3, Beispiel einer Gruppenalgebra

Seien $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$

$$x \circ y = x + y + xy\,.$$

Zeigen Sie, dass die Algebra $A = (S, \circ)$ bezüglich des binären Operators $\circ$ eine Gruppe bildet.

Lösung:

1. Zunächst ist zu prüfen, ob durch die Gleichung $x \circ y = x + y + x \cdot y$ tatsächlich eine Abbildung von $S \times S$ in $S$ definiert ist.

   Seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Es gilt offenbar $x \circ y \in \mathbb{R}$.

   Wir zeigen, dass $-1 = x + y + x \cdot y$ einen Widerspruch ergibt und deswegen $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gelten muss.

$$\begin{aligned} -1 = x + y + x \cdot y \quad &\Rightarrow \quad -1 - y = x(1 + y) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{-1 - y}{1 + y} \\ &\Rightarrow \quad x = -1\,. \end{aligned}$$

2. Wir zeigen die Assoziativität von $\circ$.

$$
\begin{aligned}
x \circ (y \circ z) &= x + (y \circ z) + x \cdot (y \circ z) \\
&= x + (y + z + y \cdot z) + x \cdot (y + z + y \cdot z) \\
&= x + y + z + y \cdot z + x \cdot y + x \cdot z + x \cdot y \cdot z \\
&= (x + y + x \cdot y) + z + (x + y + x \cdot y) \cdot z \\
&= (x \circ y) + z + (x \circ y) \cdot z \\
&= (x \circ y) \circ z \,.
\end{aligned}
$$

3. $x = 0$ ist das Einselement bezüglich $(x \circ y)$.

$$0 \circ y = 0 + y + 0 \cdot y = y\,.$$

Das linke Einselement ist offensichtlich auch rechtes Einselement, d. h. Einselement.

4. Wir zeigen, dass zu einem Element $x \in S$ das Inverse gegeben ist durch $x^{-1} = -\frac{x}{1+x}$.

   Es gilt

$$\begin{aligned} x \circ y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x + y + x \cdot y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{x}{1+x}\,. \end{aligned}$$

   Die Existenz eines linken Inversen ist damit bewiesen.

*Bemerkung:*

Allein schon aus der offensichtlichen Kommutativität folgt hier, dass jedes linke Inverse auch rechtes Inverses ist. Es sei aber bemerkt, dass die Beziehung zwischen linken und rechten Inversen auch ohne Kommutativität ganz allgemein in Gruppen untersucht werden kann.

Es genügt, allein die Existenz der linken Inversen nachzuweisen.

*Folgerung:*

Damit ist der Nachweis erbracht, dass $G$ eine Gruppe ist.

## 3.4 VA 4, Gruppen und Untergruppen

Sei $S' = (S, \circ)$ eine Halbgruppe.
Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar bezüglich $\circ$, falls gilt

$$(\forall a \in S)\,[\,a \circ x = x \circ a]\,.$$

Es sei $V(S)$ die Menge aller bezüglich $\circ$ vertauschbarer Elemente von $S$.

1. Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von $V(S)$ unter der Verknüpfung $\circ$, d. h.:

$$x, y \in V(S) \Longrightarrow x \circ y \in V(S)\,.$$

Lösung:

Seien $x, y \in V(S)$.
Zu zeigen ist

$$(\forall a \in S)\,[a \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ a]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a \circ (x \circ y) &= (a \circ x) \circ y \\ &= (x \circ a) \circ y \\ &= x \circ (a \circ y) \\ &= x \circ (y \circ a) \\ &= (x \circ y) \circ a)\,. \end{aligned}$$

2. Nun nehmen wir an, dass $S'$ eine Gruppe mit Einselement $1$ ist.

   Zeigen Sie, dass die Unterhalbgruppe $(V(S), \circ_{V(S)})$ von $S'$ dann ebenfalls eine Gruppe ist.

Lösung:

Wir zeigen die restlichen Abgeschlossenheitseigenschaften von $V(S)$, d. h., dass gilt

$$1 \in V(S), \text{ und}$$
$$x \in V(S) \implies x^{-1} \in V(S).$$

$1 \in V(S)$:

Ein Einselement ist mit allen Elementen vertauschbar, also folgt

$$a \circ 1 = 1 \circ a \quad \text{für alle } a \in S.$$

$x \in V(S) \Rightarrow x^{-1} \in V(S)$:

Aus $a \circ 1 = 1 \circ a$ folgt (Klammern können weggelassen werden)

$$\begin{aligned} a \circ x^{-1} \circ x &= x^{-1} \circ x \circ a \\ &= x^{-1} \circ a \circ x\,. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit $x^{-1}$ von rechts folgt die Gleichung

$$a \circ x^{-1} = x^{-1} \circ a\,.$$