Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Abschlussklausur
16. Februar 2013

Diskrete Strukturen

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 150 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ	Korrektor
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt einen Graph $G = (V, E)$ mit Kantenzahl $|E| = |V| - 2$, der einen Kreis enthält.
2. Sei $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein Element der Symmetrischen Gruppe S_8. Dann gibt es eine Untergruppe U von S_8, die p enthält und 4 Elemente besitzt.
3. $3^n \in \Omega(e^{n \ln n})$.
4. $\nabla^2 E = \Delta - \nabla$.
5. Seien $s_{n,k}$ bzw. $S_{n,k}$ die Stirling-Zahlen erster bzw. zweiter Art. Dann gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $2k < n$ die Ungleichung $S_{n,k} < s_{n,k}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei X eine nicht leere Menge. Wir führen den Äquivalenzoperator $\diamond$ auf Teilmengen $A, B \subseteq X$ wie folgt ein: $A \diamond B := \overline{A \Delta B}$, i.W. ist $A \diamond B$ definiert als das Mengenkomplement der Symmetrischen Differenz von A und B. Offenbar bildet $S = (\mathcal{P}(X), \diamond)$ eine Algebra.

1. Zeigen Sie die Assoziativität des Operators $\diamond$ in der Algebra S, d.h., dass für alle $A, B, C \subseteq X$ gilt:
$$(A \diamond B) \diamond C \;=\; A \diamond (B \diamond C)\,.$$

2. Zeigen Sie, dass die Algebra S eine Gruppe bildet bezüglich des Operators $\diamond$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Wir betrachten Wörter s über dem Alphabet $A = \{a, b, c\}$ und notieren den i-ten Buchstaben in einem Wort $s \in A^*$ als s_i, falls $0 < i \leq |s|$ gilt (z. B.: $s_2 = a$, falls $s = bac$).

Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive 3-te Einheitswurzel von 1, mithin $\omega^3 = 1$. Wir definieren für alle $s \in A^*$ das komplexe Gewicht $g(s) \in \mathbb{C}$ durch

$$g(a) = 1, \quad g(b) = \omega, \quad g(c) = \omega^2, \quad g(s) = \prod_{i=1}^{|s|} g(s_i)\,,$$

mit $g(\varepsilon) = 1$ für das leere Wort $s = \varepsilon$.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $S_n = \{s \in S\,;\, |s| = n\}$. Bekanntlich bedeutet $\sum_{s \in S_n} g(s)$ die Summe mit der Anzahl $|S_n|$ **aller** Summanden der Form $g(s)$ mit $s \in S_n$.

1. Man zeige: $$\sum_{s \in S_1} g(s) = 0\,. \tag{1}$$

2. Wir nehmen (1) als bewiesen an. Man zeige nun durch Induktion über n für alle $n \geq 1$: $$\sum_{s \in S_n} g(s) = 0\,. \tag{2}$$

3. Wir betrachten die diskrete Fouriertransformation

   $$\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) = (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(\omega), \ldots, P_{\vec{a}}(\omega^{n-1}))\,.$$

   Berechnen Sie für die Einheitswurzel $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ den Vektor $F_{3,\omega}((1, 0, 1))$ und zeigen Sie, dass $F_{3,\omega}((1, 0, 1)) = (2, 1-\omega, 1+\omega)$ **nicht** gilt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

1. Sei $G = (V, E)$ ein nicht leerer 4-regulärer Graph, der minimal ist in dem Sinne, dass es keinen 4-regulären Graph mit Knotenmenge V' gibt, so dass $0 < |V'| < |V|$ gilt.

   Zeigen Sie, dass G nicht planar ist. Benützen Sie dabei in der Vorlesung vorgestellte Ergebnisse.

2. Geben Sie einen nicht leeren 3-regulären planaren bipartiten Graph $G = (V, E)$ an (übersichtliche Zeichnung genügt) und zeigen Sie, dass G die geforderten Eigenschaften besitzt.

   Zum Beweis der Planarität genügt ggf. die Zeichnung.

3. Sei $G = (V, E)$ ein nicht leerer einfacher Graph. Knoten $x, y \in V$ nennen wir äquivalent, i. Z. $x \sim y$, falls für alle Knoten $w \in V$ gilt

   $$\{x, w\} \in E \iff \{y, w\} \in E\,.$$

   Zeigen Sie, dass die binäre Relation $\sim$ über V transitiv ist.

   Sind isolierte Knoten x und y äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

1. Geben Sie eine Liste aller irreduziblen Polynome $p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 2 an und begründen Sie, warum Ihre Liste vollständig ist.

2. Das Polynom $q(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ mit $q(x) = x^4 + x + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$. Wir betrachten den Körper $K = (\mathbb{Z}_2[x]_4, +_q, \cdot_q)$. Seine Elemente werden repräsentiert durch die Reste bei Polynomdivision durch q. Die Elemente haben also höchstens den Grad 3.

   Sei $t(x) = x^3 + x^2 + 1 \in K$.

   (a) Berechnen Sie $t^2 = t \cdot_q t \in K$.

   (b) Berechnen Sie, insbesondere durch Anwendung des Euklidischen Algorithmus, das multiplikative Inverse s von t, so dass also $s \cdot_q t = 1$ gilt.

   (c) Für welches n ist K isomorph zum Galoiskörper $GF(n)$?

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Wir verteilen n_a Äpfel und n_b Birnen auf r (unterscheidbare) Personen. Je zwei Äpfel seien nicht unterscheidbar, und je zwei Birnen seien ebenfalls nicht unterscheidbar. Zwei Verteilungen seien gleich, wenn jede Person sagen kann, dass sie in beiden Verteilungen gleich bedient worden ist.

Wie viele Verteilungen gibt es jeweils in den folgenden Fällen? Sie dürfen zur Darstellung des Ergebnisses bekannte Funktionen der Kombinatorik und Summation verwenden:

1. Alle Äpfel und Birnen werden beliebig verteilt, d. h. jede Person kann gleichzeitig maximal n_a und maximal n_b Äpfel bzw. Birnen unter Berücksichtigung der Gesamtanzahl des vorhanden Obstes erhalten.

2. Jede Person erhält genau 1 Stück Obst (Apfel oder Birne). Übrigbleibendes Obst wird nicht verteilt.

   Welche notwendige und hinreichende Bedingung muss gelten, damit es eine zulässige Verteilung gibt?

3. Jede Person erhält höchstens 1 Stück Obst. Das Obst wird restlos verteilt.

   Welche notwendige und hinreichende Bedingung muss gelten, damit es eine zulässige Verteilung gibt?

Berechnen Sie für jeden der genannten Fälle mit Hilfe Ihrer Formel das Ergebnis in Dezimaldarstellung für $r = 4$, $n_a = 2$ und $n_b = 3$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine reellwertige Folge, die die folgende homogene Rekursionsgleichung dritter Ordnung erfüllt:

$$f_{n+3} - 11f_{n+2} + 35f_{n+1} - 25f_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass die Zahl 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Rekursion (1) ist.

2. Ausgehend von der Folge $(f_n)_{n\geq 0}$, die Gleichung (1) erfüllt, definieren wir eine Folge $(g_n)_{n\geq 0}$ durch $g_n = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass $(g_n)_{n\geq 0}$ die folgende Rekursionsgleichung erfüllt:
   $$g_{n+2} - 10g_{n+1} + 25g_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2}$$

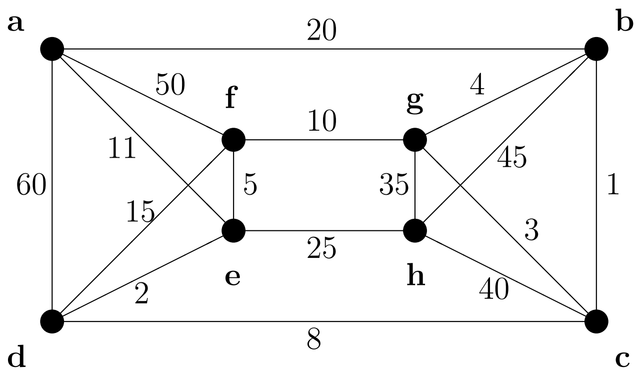
3. Zeigen Sie, dass jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung (2) auch Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Gleichung (1) ist. Welche Nullstellen sind das?

4. Zeigen Sie, dass es Parameter c_0, c_1, c_2 gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
   $$f_n = c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (c_1 + c_2 k) \cdot 5^k\,. \tag{3}$$

   Hinweis: Beachten Sie, dass f_n eine Stammfunktion von g_n ist.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Wir betrachten den folgenden Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$, dessen Kanten mit ganzzahligen Längen gewichtet sind:



1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Kruskal die Kantenmenge eines bezüglich der Summe der Gewichte minimalen Spannbaums von G. Protokollieren Sie Ihren Berechnungsweg so, dass die Reihenfolge der Berechnungsschritte nach Kruskal nachvollziehbar ist.

2. Wir betrachten die Knoten $V = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ in ihrer alphabetischen Reihenfolge, d. h. wir nummerieren die Knoten, so dass $V = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}\}$ gilt, und wir kodieren Spannbäume von G entsprechend dieser Nummern.

   Bestimmen Sie den Spannbaum mit Prüfer-Code (5,3,7,5,6,7) (Zeichnung mit Knotennummerierung genügt). Welches Gewicht besitzt dieser Spannbaum?
