Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 12
14. Januar 2013

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 22. Januar 2013, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

1. Wie viele Wörter der Länge 9 gibt es, die genau je 3 Buchstaben a und b und c enthalten?
2. Seien N und R endliche Mengen mit $|N| = 10$ und $|R| = 11$. Wie viele Abbildungen $f : N \to R$ gibt es, so dass für das Bild $f(N) = \{f(n)\,;\, n \in N\}$ gilt $|f(N)| = 9$?
3. Wir betrachten 10 nicht unterscheidbare Bälle und 11 unterscheidbare Boxen.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, mindestens 9 Bälle auf die Boxen so zu verteilen, dass die Anzahl der leeren Boxen gleich 2 ist?

Zur Darstellung der Ergebnisse dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

1. Man zeige durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \;=\; (-1)^n \binom{m-1}{n}. \tag{1}$$
2. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass Gleichung (1) gilt, in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ alle Nullstellen des Polynoms
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{\underline{k}}.$$

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie den Koeffizienten von tx^2y^4z in der ausmultiplizierten Summenentwicklung von $(x + y + z + t)^8$ als Zahl in Dezimaldarstellung.

   Berechnen Sie das Ergebnis durch sukzessive Klammerung und Bestimmung von Binomialkoeffizienten.
2. Seien p eine Primzahl und $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq p - 1$.

   Man zeige, dass p Teiler von $\binom{p}{i}$ ist.

   Gilt diese Aussage auch dann, wenn $p \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist? Beispiel!

Hausaufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Man zeige:

1. $$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}} \cdot (x-m)^{\underline{n}}\,. \tag{1}$$

2. $$\frac{x^{\underline{m}}}{x^{\underline{n}}} = \frac{1}{(x-m)^{\underline{n-m}}}\,.$$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

1. Seien $S_{m,n}$ die Stirling-Zahlen zweiter Art. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{i,2} \;=\; \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\,.$$

2. Was ergibt die folgende Summe für $n \geq 2$ und die Stirling-Zahlen $s_{n,k}$ erster Art? Beweis!
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\,.$$

3. Man zeige für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$: $S_{m,n} \leq s_{m,n}$.

Hausaufgabe 6 (3 Punkte)

1. Man zeige: $E\nabla^2 = \Delta - \nabla$.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung
$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot 3^k \;=\; n \cdot 3^{n+1}\,.$$
Wir fassen die linke bzw. rechte Seite der Gleichung als reellwertige Funktionen $l(n) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot 3^k$ bzw. $r(n) = n \cdot 3^{n+1}$ über den natürlichen Zahlen auf.

   Beweisen Sie die Gleichung, indem Sie die Gleichungen $\Delta l(n) = \Delta r(n)$ und $l(1) = r(1)$ zeigen!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{bzw.} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

1. Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) + B(z)$.
2. Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$.
3. Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = z \cdot A(z)$.
4. Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$.
5. Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz}A(z)$.
6. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{A(z)}{1-z}$.
7. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Vorbereitung 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}\,.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

Vorbereitung 3

Bearbeiten Sie Arbeitsblatt 4 über die Lösung von Rekursionsgleichungen.

Tutoraufgabe 1

1. Gegeben sei die Rekursionsgleichung $f_n - 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0\ \forall n \geq 2$ mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a$ und $f_1 = b$.

   (a) Bestimmen Sie die entsprechende vollständige Rekursion (siehe Arbeitsblatt 4).

   (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursiongleichung.

   (c) Zeigen Sie, dass $F(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$ die erzeugende Funktion zur Rekursionsgleichung ist.

   (d) Zeigen Sie, dass $f_n = \left(\left(\frac{b}{2} - a\right)n + a\right)2^n$ gilt für alle $n \geq 0$.

2. Sei a_n für $n \geq 0$ definiert durch $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$. Zeigen Sie, dass stets $a_n \in \mathbb{N}$ gilt, und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsgleichung für die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ an.

Tutoraufgabe 2

Gegeben sei die inhomogene lineare Rekursion für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+1} + 3\cdot f_n \quad = \quad n\cdot 2^n\,, \quad \forall n \geq 0\,. \tag{1}$$

1. Leiten Sie für $s_n = n\cdot 2^n$ eine Rekursion der folgenden Form her

$$s_{n+2} + a\cdot s_{n+1} + b\cdot s_n \quad = \quad 0\,, \quad \forall n \geq 0 \tag{2}$$

   und bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Leiten Sie durch geeignete Substitution aus den Gleichungen (1) und (2) eine homogene Rekursion für $(f_n)_{n\geq 0}$ der folgenden Form her

$$f_{n+3} + q_1\cdot f_{n+2} + q_2\cdot f_{n+1} + q_3\cdot f_n \quad = \quad 0\,, \quad \forall n \geq 0 \tag{3}$$

   und bestimmen Sie $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursion (3) an.

4. Lösen Sie die Rekursion (1) mit Nebenbedingung $f_0 = 1$. Geben Sie die erzeugende Funktion der erhaltenen Lösung an.

Tutoraufgabe 3

Stellen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben zunächst eine homogene bzw. inhomogene lineare Rekursionsgleichung auf.

1. n Personen (Informatikstudenten I, Mathematikstudenten M oder Professoren P) rutschen hintereinander in einer der Rutschen im FMI-Gebäude. Wir unterscheiden die Personen nur insofern, als sie verschiedenen Gruppen I, M oder P angehören.

   (a) Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn nicht zwei Professoren hintereinander rutschen dürfen?

   (b) Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn die Anzahl der Professoren gerade sein soll?

2. Wie viele Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine drei aufeinander folgenden Zahlen enthalten?