SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

22. Mai 2014

ZÜ V

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen, Probleme Termine
2. Thema	Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen Mischung von Verteilungen
3. Vorbereitung	VA Blatt 6

1. Übungsbetrieb

Fragen?

Vorschläge?

Terminänderung:

Die Zentralübung am 12. Juni findet nicht statt!

2. Thema: Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen

Definition

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ und Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr$.
Dann ist die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ definiert als

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[X = i] \cdot s^i$$

d.h.

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X]\,.$$

Bemerkung

Es gilt $G_X(1) = 1$, da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ist.

Es gilt $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$.

Satz 77 (Mischung von Verteilungen)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit der w.e. Funktion $G_X(s)$. N sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit w.e. Funktion $G_N(s)$. Dann besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 + \ldots + X_N$ die w.e. Funktion

$$G_Z(s) = G_N(G_X(s))\,.$$

Zusatz:

Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$
folgt $G'_Z(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1)$,
mithin, wegen $G_X(1) = 1$,

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,.$$

3. Vorbereitung VA Blatt 6

Themen:

1. Erz. Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen
2. Mischung von Verteilungen
3. Borelsche Mengen

3.1 VA 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Zur Erinnerung: Die Dichte einer negativ binomialverteilten Variablen X_n eines Wertes i bei Erfolgswahrscheinlichkeit p und n Wiederholungen ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \, .$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ für $i < n$ folgt.

Für die erzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \,. \end{aligned}$$

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s)\,,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}\,.$$

Beweis der Rekursion:

$$\begin{aligned} G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^{i} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s)\,. \end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängig geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .$$

(Satz 75 der Vorlesung)

3.2 VA 2

Wir betrachten eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$ und der Dichtefunktion

$$f_X(i) = \binom{2}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{2-i} \quad \text{für} \quad i \in W_X\,.$$

Außerdem sei eine Zufallsvariable Y gegeben mit $W_Y = \{1, 2\}$ und $\Pr[Y = 1] = \frac{1}{2}$.

1. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen $G_X(z)$ und $G_Y(z)$ für X bzw. Y!

Lösung

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)z + \left(\frac{1}{3}\right)^2 z^2 \\ &= \frac{4}{9} + \frac{4}{9}z + \frac{1}{9}z^2 \\ &= \frac{1}{9}(z+2)^2. \end{aligned}$$

$$G_Y(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2.$$

2. Nun betrachten wir das folgende Zufallsexperiment:

   Zunächst wird Y getestet.

   Der Wert von Y bestimmt, ob die Zufallsvariable X nur ein erstes Mal getestet wird mit Wert X_1,
   oder ob X auch ein
   zweites Mal getestet wird mit Wert X_2 beim zweiten Test.

   Je nachdem bestimmen wir dann

$$Z = X_1 \quad \text{oder} \quad Z = X_1 + X_2\,.$$

   Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z!

Lösung

Dies ist eine Anwendung von Satz 77 der Vorlesung (siehe oben).

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p = 2 \cdot \tfrac{1}{3},$$
$$\mathbb{E}[Y] = \tfrac{3}{2}.$$

Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ folgt $G'_Z(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1)$, mithin, wegen $G_X(1) = 1$,

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,.$$

3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Z von Z!

Lösung

$$
\begin{aligned}
G_Z(z) &= G_Y(G_X(z)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}(z+2)^2 + \frac{1}{81}(z+2)^4 \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} \left(9z^2 + 36z + 36 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16 \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} \left(z^4 + 8z^3 + 33z^2 + 68z + 52 \right).
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich die Dichtewerte aus den Koeffizienten des Polynoms $G_Z(z)$.

$$f_Z(0) = \frac{52}{162},$$

$$f_Z(1) = \frac{68}{162},$$

$$f_Z(2) = \frac{33}{162},$$

$$f_Z(3) = \frac{8}{162},$$

$$f_Z(4) = \frac{1}{162}.$$

3.3 VA 3

Es sei Ω eine Ergebnismenge.

Wir nehmen an, dass wir für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten definieren wollen.

Wir suchen dazu eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.

Sei

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.
2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

Lösung

Wir lernen ein wichtiges Beweisprinizip kennen:
Konstruktion mittels Bildung des Durchschnitts (z. B. von Algebren).

Wir zeigen zunächst, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

Dazu sind die folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften des Systems $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ nachzuweisen:

(E1) $\Omega \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

(E2) $A \in \sigma_\Omega(\mathcal{E}) \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

(E3) $A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

Beweis: Elementar.

Nun zeigen wir:

Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis:

$\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist Durchschnitt aller σ-Algebren mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

Daraus folgt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Lösung

Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist die Menge $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ mit

$$\mathcal{E}' = \{[a,b] \times [c,d]\,;\; a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$$

abzählbar.

Das Komplement von K läßt sich durch Elemente von $\mathcal{E}'$ ausschöpfen, d. h.

$$\overline{K} = \bigcup \{I \in \mathcal{E}'\,;\; I \subseteq \overline{K}\}\,.$$

Damit gilt $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.