Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 12
7. Juli 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 11. Juli 2014, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette M über den Zuständen $Q = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen von M.
2. Geben Sie die Menge aller transienten Zustände von M an.
3. Geben Sie die Übergangsmatrix einer zeithomogenen Markov-Kette B mit drei Zuständen s_1, s_2, s_3 an, so dass s_1 transient ist, s_2 absorbierend ist und s_3 rekurrent ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die Zufallsvariablen X_0, X_1, $X_2, \ldots$ seien unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $0 < p < 1$.

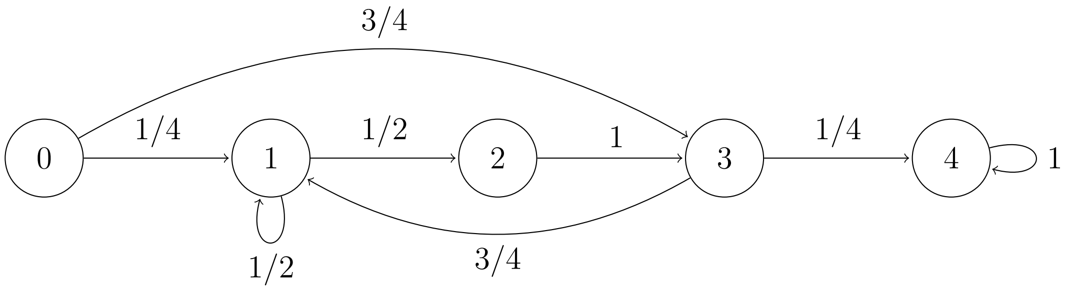
1. Zeigen Sie, dass es sich bei $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y_t := \min\{X_0, \ldots, X_t\}$ um eine Markov-Kette handelt. Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten?
2. Stellt $Z_t := \max\{X_0, \ldots, X_t\}$ ebenfalls eine Markov-Kette dar? Begründung!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Auf einem Zentralrechner treffen Jobs zur Bearbeitung ein. Hierbei unterscheiden wir rechenintensive und einfache Jobs. In jedem Schritt handelt es sich unabhängig von allen anderen Jobs mit Wahrscheinlichkeit p um einen rechenintensiven Job. Da der Server nicht ausreichend dimensioniert ist, stürzt das System ab, wenn zwei rechenintensive Jobs aufeinander folgen.
Wie viele Schritte vergehen bis zu diesem Moment im Mittel?
Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer geeigneten Markov-Kette.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine endliche (zeit)homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit über der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Die positiven Übergangswahrscheinlichkeiten seien durch das folgende Übergangsdiagramm gegeben:



1. Sei T_{02} die Übergangszeit vom Zustand 0 in den Zustand 2.
   (a) Bestimmen Sie $\Pr[T_{02} = n]$ für alle $n \in \{2, 3\}$!
   (b) Zeigen Sie $\Pr[T_{02} = n] > 0$ für alle $n \geq 4$.
2. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit f_{01}!
3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit h_{34}!

Zusatzaufgabe 7 (Wird nicht korrigiert)

Anton (A) und Bodo (B) spielen das folgende Spiel mit einem fairen Würfel.
Wenn A an der Reihe ist, würfelt er so lange mit einem der Würfel, bis er entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist B an der Reihe) oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl geworfen hat (dann ist das Spiel zu Ende und A hat gewonnen).
Ist B an der Reihe, so würfelt er einmal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so ist das Spiel zu Ende und B hat gewonnen. Ansonsten ist A wieder an der Reihe. A beginnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der A gewinnt. Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Zusatzaufgabe 8 (Wird nicht korrigiert)

An der Kasse eines Kaufhauses werden Waren in Pakete verpackt. Die benötigte Zeit T_i für die Fertigstellung eines Pakets i sei exponentialverteilt, und die Zufallsvariablen T_i seien unabhängig für alle i mit jeweils demselben Erwartungswert von $0,5$ Minuten.

1. Wir interessieren uns für die zur Fertigstellung von 60 Paketen benötigte Zeit $S = \sum_{i=1}^{60} T_i$. Wie groß ist die Varianz von S?
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass die Fertigstellung von 2 Paketen länger als 2 Minuten benötigt.
3. Nun interessieren wir uns für die Anzahl $P(t)$ der bis zum Zeitpunkt t fertiggestellten Pakete. Die Zeit wird wieder in Minuten gemessen. Für jedes t ist $P(t)$ eine Zufallsvariable.

   Bestimmen Sie für $t = 2$ die Dichtefunktion $f_{P(t)}$ und geben Sie für $f_{P(t)}(5)$ einen arithmetischen Ausdruck an.