SS 2015

Zentralübung zur Vorlesung Theoretische Informatik

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2015SS/theo/uebung/

25. Juni 2015

ZÜ VIII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb Fragen, Probleme?
2. Thema Erweiterte PR Regeln

   Komposition von Funktionen
   Rekursive Schemata
3. Vorbereitung Blatt 10

1. Fragen, Anregungen?

Aktuelle Fragen?

2. Thema Erweiterte PR Regeln

Die Konstruktion von primitiv-rekursiven Funktionen stützt sich wesentlich auf die Erzeugungsregeln für funktionale Ausdrücke.

Die Regeln dafür kann man weit oder eng fassen in Abhängigkeit davon, welchen Schwerpunkt man auf die Beweise legt.

Die sogenannten erweiterten PR Regeln lassen in gewissem Sinne die Bildung aller funktionalen Ausdrücke zu.

2.1 Komposition von Funktionen

Abgesehen von der Vorgabe von Basisfunktionen wie Konstanten, Projektionen und Nachfolgerfunktion ist die erste Regel zur Konstruktion berechenbarer Funktionen die „Komposition von Funktionen“ aus schon konstruierten berechenbaren Funktionen.

Unter der Komposition von Funktionen versteht man zunächst die Definition von Funktionen durch „Hintereinanderausführung“ $f = g \circ h$ von Funktionen $h : A \to B$ und $g : B \to C$ mit der Definition

$$f(x) := (g \circ h)(x) := g(h(x))\,.$$

Die direkte Verallgemeinerung auf Funktionen mit mehreren Argumenten lautet

$$f(\overline{x}) := g(h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x})\,,$$

wobei $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt und im Kontext berechenbarer Funktionen insbesondere $f : {\mathbb{N}_0}^n \to \mathbb{N}_0$, $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ und $h_i : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ für alle i gilt.

Eine entsprechende Schreibweise lautet mit $\vec{h}(\overline{x}) = (h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x}))$

$$f = g \circ \vec{h}\,.$$

Beobachtung

Stellt man auch die h_i durch Komposition dar, dann wird die Argumentliste $\overline{x}$ vererbt.

Dies bedeutet, dass der Kantorovich-Baum des funktionalen Ausdrucks für eine Funktion f, die Variablen x_i in seinen Blättern als Projektionsfunktionen $\pi_i(\overline{x})$ enthalten muss.

Satz der Erweiterten Komposition

Sei t ein beliebiger funktionaler Ausdruck, der nur Funktionssymbole g_i von primitiv-rekursiven Funktionen, Variablen $x_j \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und Konstanten c_k enthält. Dann definiert

$$f(x_1, \ldots, x_n) = t \text{ eine primitiv-rekursive Funktion.}$$

Der Beweis ist einfach wie folgt:

Ersetze in t alle Variablen x_i durch den funktionalen Ausdruck $\pi_i^n(\overline{x})$ mit Ergebnis t'.

Dann wird mit
$f(\overline{x}) = t'$ nach der einfachen Kompositionsregel eine primitiv-rekursive Funktion definiert.

Beispiel

Sei $f(x, y) = g_1(x, g_2(y, g_3(x)))$.

Umsetzung:

$$
\begin{aligned}
h_1(x, y) &= g_3(\pi_1^2(x, y))\,,\\
h_2(x, y) &= g_2(\pi_2^2(x, y), h_1(x, y))\,,\\
f(x, y) &= g_1(\pi_1^2(x, y), h_2(x, y))\,.
\end{aligned}
$$

2.2 Rekursive Schemata

Sei t_0 ein funktionaler Ausdruck, der nur primitiv-rekursive Funktionen und Variable x_i enthält.
t enthalte als Teilausdrücke nur

- $f(m, \overline{x})$ mit einem Variablenvektor $\overline{x}$,
- primitiv-rekursive Funktionen,
- m und
- Variablen x_i.

Dann heißen die Gleichungen

$$f(0, \overline{x}) = t_0 \,, \quad f(m+1, \overline{x}) = t$$

das *erweiterte Schema* der primitiven Rekursion.

Aber

$f(f(m,\overline{x}),\overline{x})$ ist im erweiterten Schema nicht zulässig.

Bemerkung

Auch eine Erweiterung auf Systeme von Gleichungen ist möglich, in denen dann auch für ein konkretes k die Teilausdrücke $f(m-1,\overline{x}),\ldots,f(m-k,\overline{x})$ vorkommen dürfen.
(Siehe Tutoraufgaben, Kodierung mit Paarfunktionen)

Satz

Die Anwendung des erweiterten Schemas primitiver Rekursion führt nicht aus der Menge der primitiv-rekursiven Funktionen heraus.

Beweis

1. Ersetze in t_0 alle Variablen x_i durch den funktionalen Ausdruck $\pi_i^n(\overline{x})$ mit Ergebnis t_0'.

Dann definiert t_0 eine primitiv-rekursive Funktion $g(\overline{x}) = t_0'$.

2. Sei $\overline{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$.

Ersetze in t alle Vorkommen von Variablen x_i mit $i \in [n]$ durch den funktionalen Ausdruck $\pi_i^{n+2}(\overline{y})$, alle Vorkommen von Ausdrücken $f(m, \overline{x})$ durch x_{n+2} und alle verbleibenden Vorkommen von Variablen m durch x_{n+1}. Das Ergebnis sei t'.

Dann wir durch $h(\overline{y}) = t'$ eine primitiv-rekursive Funktion h definiert.

3. Falls f das erweiterte Schema der PR erfüllt, dann erfüllt f auch das einfache PR-Schema mit den in 1. und 2. konstruierten Funktionen g und h wie folgt:

$$\begin{aligned} f(0,\overline{x}) &= g(\overline{x})\,, \\ f(m+1,\overline{x}) &= h(\overline{x},m,f(m,\overline{x}))\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. Vorbereitung Blatt 10

3.1 VA 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn A semi-entscheidbar und B entscheidbar ist, dann ist $A \setminus B$ semi-entscheidbar.
2. Gegeben seien zwei entscheidbare Prädikate $P(x, y)$ und $Q(x, y)$. Zeigen Sie, dass $R(x, y) = P(x, y) \wedge Q(x, y)$ entscheidbar ist.
3. Ist jede Teilmenge einer rekursiven Sprache rekursiv aufzählbar? Beweis!

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn A semi-entscheidbar und B entscheidbar ist, dann ist $A \setminus B$ semi-entscheidbar.

Lösung

Die Aussage ist wahr, und wir geben einen Algorithmus an, der $\chi'_{(A\setminus B)}$ berechnet:

> *Gegeben ein w, entscheide zunächst, ob $w \in B$.*
>
> *Falls ja, gehe in eine Endlosschleife.*
> *Falls nicht, berechne χ'_A und gib (bei Terminierung) das Ergebnis zurück.*

So berechnet man offensichtlich die Funktion

$$\begin{aligned} f(w) &= \begin{cases} \perp & \text{falls } \chi'_B(w) = 1 \\ \chi'_A(w) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } w \notin B \text{ und } w \in A \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \chi'_{(A\setminus B)}(w)\ . \end{aligned}$$

2. Gegeben seien zwei entscheidbare Prädikate $P(x, y)$ und $Q(x, y)$.
Zeigen Sie, dass $R(x, y) = P(x, y) \wedge Q(x, y)$ entscheidbar ist.

Lösung

Sei ein nichtleeres Alphabet Σ gegeben, und seien P, Q zweistellige Prädikate über Σ^* mit den berechenbaren charakteristischen Funktionen χ_P bzw. χ_Q der Funktionalität $\Sigma^* \times \Sigma^* \to \{0, 1\}$.
Dann lautet die charakteristische Funktion χ_R für $R(x, y) = P(x, y) \wedge Q(x, y)$ wie folgt.

$$\chi_R(x, y) = \chi_P(x, y) \cdot \chi_Q(x, y)\,.$$

Offensichtlich ist χ_R berechenbar.

3. Ist jede Teilmenge einer rekursiven Sprache rekursiv aufzählbar? Beweis!

Lösung

Es existiert eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, die nicht rekursiv aufzählbar ist, z.B. L_d. Da aber Σ^* rekursiv ist, kann nicht jede Teilmenge von Σ^* rekursiv aufzählbar sein. L ist ein Gegenbeispiel.

Erinnerung: $L_d = \{w \in \Sigma^* \,;\, M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$.

3.2 VA 2

Zeigen Sie, dass man die folgende Anweisung durch ein LOOP-Programm simulieren kann, das kein IF-Konstrukt enthält:
IF $x_i \leq x_j$ **THEN** P_1 **ELSE** P_2 **END**.

Beweis

Das folgende LOOP - Programm stützt sich auf das Konstrukt IF $x = 0$ THEN P END,
das in der Vorlesung als LOOP-Programm simuliert wurde.

Seien $x_1, x_2, \notin \{x_i, x_j\}$.

$x_1 := x_i$; LOOP x_j DO $x_1 := x_1 - 1$; // $x_1 = x_i \dot{-} x_j$
$x_2 := 0$;
IF $x_1 = 0$ THEN P_1 ; $x_2 := 1$ END ;
IF $x_2 = 0$ THEN P_2 END ;

3.3 VA 3

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

$$iszero(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Lösung

Wir schreiben die primitiv-rekursiven Basis-Projektionsfunktionen $proj_{k,i}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ als $\pi_i^k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

s sei die Basis-Nachfolgerfunktion.

Wir definieren zunächst die primitiv-rekursiven arithmetischen Funktionen $add(x, y)$, $mult(x, y)$, $\dot{-}\,(x, y)$ bzw. in üblicher Infixschreibweise $x + y$, $x \cdot y$, $x \dot{-} y$

und Semantik

$$\dot{-}\,(x, y) \;=\; \max\{x - y, 0\}\,.$$

Addition

Lesbare Kurzschrift zuerst:

$$\begin{aligned} 0 + y &= y\,, \\ (x+1) + y &= s(x+y)\,. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} add(0, y) &= y\,, \\ add(x+1, y) &= s(add(x, y)) \end{aligned}$$

Syntaktisches Format:

$$h(r, x, y) = s(\pi_1^3(r, x, y))\,,$$

$$\begin{aligned} add(0, y) &= \pi_1^1(y)\,, \\ add(x+1, y) &= h(add(x, y), x, y)\,. \end{aligned}$$

Multiplikation

Lesbare Kurzschrift zuerst:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot y) &= 0\,, \\
(x+1) \cdot y &= (x \cdot y) + y\,.
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
mult(0,y) &= 0\,, \\
mult(x+1,y) &= add(mult(x,y),y)
\end{aligned}
$$

Syntaktisches Format:

$$
\begin{aligned}
k(y) &= 0\,, \\
h(r,x,y) &= add(\pi_1^3(r,x,y), \pi_3^3(r,x,y))\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
mult(0,y) &= k(y)\,, \\
mult(x+1,y) &= h(mult(x,y),x,y)\,.
\end{aligned}
$$

Modifizierte Subtraktion

Lesbare Kurzschrift zuerst:

$$\begin{aligned} pred(0) &= 0\,, \\ pred(x+1) &= x\,, \\[4pt] x \dot{-} 0 &= x\,, \\ x \dot{-} (y+1) &= pred(x \dot{-} y)\,. \end{aligned}$$

Syntaktisches Format:

$$
\begin{aligned}
h_1(r,x) &= \pi_2^2(r,x)\,, \\[1ex]
pred(0) &= 0\,, \\
pred(x+1) &= h_1(pred(x),x)\,, \\[1ex]
h_2(r,x,y) &= pred(\pi_1^3(r,x,y))\,, \\[1ex]
\dot{-}^R(0,x) &= \pi_1^1(x)\,, \\
\dot{-}^R(y+1,x) &= h_2(\dot{-}^R(y,x),y,x)\,, \\[1ex]
\dot{-}\,(x,y) &= \dot{-}^R(y,x)\,.
\end{aligned}
$$

Lösung in lesbarer Form:

$$
\begin{aligned}
iszero(0) &= 1\,,\\
iszero(x+1) &= 0\,,\\
eq(x,y) &= iszero((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x))\,.
\end{aligned}
$$

Mit welchen Regeln kann man stets eine lesbare Form erreichen?

Dieser Frage werden wir in VA 4 nachgehen.

3.4 VA 4

Sei $f(x, y)$ primitiv rekursiv.

Zeigen Sie mit Hilfe der Projektionsfunktionen π_i^k zusammen mit der (nicht erweiterten) Komposition, dass die Funktion g mit

$$g(x, y) = f(y, x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ebenfalls primitiv rekursiv ist.

Lösung

$$g(x, y) = f(\pi_2^2(x, y), \pi_1^2(x, y)) \, .$$

3.5 VA 5

Wir bezeichnen f als eine *erweiterte Komposition* der Funktionen $g_1, \ldots, g_k$, falls

$$f(x_1, \ldots, x_n) = t\,,$$

so dass t ein Ausdruck ist, der nur aus den Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ und den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht.

Beispiel:

$$f(x, y) = g_1(x, g_2(y, g_3(x)))\,.$$

Sei t_0 ein funktionaler Ausdruck, der nur primitiv-rekursive Funktionen und Variable x_i enthält.
t enthalte als Teilausdrücke nur $f(m, \overline{x})$ mit einem Variablenvektor $\overline{x}$, primitiv-rekursive Funktionen, m und Variable x_i.

Dann heißen die Gleichungen

$$f(0, \overline{x}) = t_0\,, \quad f(m+1, \overline{x}) = t$$

das *erweiterte Schema* der primitiven Rekursion.

Aber

$f(f(m, \overline{x}), \overline{x})$ ist im erweiterten Schema nicht zulässig.

Bemerkung

Auch eine Erweiterung auf Systeme von Gleichungen ist möglich, in denen dann auch für ein konkretes k die Teilausdrücke $f(m-1, \overline{x}), \ldots, f(m-k, \overline{x})$ vorkommen dürfen.
(Siehe Tutoraufgaben, Kodierung mit Paarfunktionen)

Aufgabe

Man zeige:

1. Eine erweiterte Komposition von primitiv-rekursiven Funktionen ist wieder primitiv-rekursiv.

2. Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus der Menge der primitiv-rekursiven Rekursionen heraus.

Beweise

Die zweite Behauptung zeigt man mit erweiterter Komposition, siehe Thema.

Die erste Behauptung wurde gleichfalls im Thema bewiesen.