Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 3
27. April 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 4. Mai 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei M eine nichtleere Menge. Wir nennen eine binäre Relation $R \subseteq M \times M$ über einer Menge M vollständig, falls die folgende Implikation (Regel) gilt:

$$(A\text{v}) \qquad (x,y) \in R \wedge (u,v) \in R \implies (x,v) \in R \wedge (u,y) \in R\,.$$

1. Sei V eine Menge von vollständigen Relationen über M. Zeigen Sie, dass dann der Durchschnitt aller $R \in V$ wieder vollständig ist, d.h.

   $$\bigcap_{R \in V} R \quad \text{ist vollständig.}$$

   Dabei gelte $\bigcap_{R \in V} R = M \times M$, falls V leer ist.

2. Sei R eine binäre Relation über M. Wir definieren die vollständige Hülle R^{v} von R durch

   $$R^{\text{v}} := \bigcap_{(S \supseteq R \text{ und } S \text{ erfüllt } A\text{v})} S\,.$$

   Seien $M = \mathbb{N}$ und $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,;\, y = x + 10 \wedge x \in [10]\}$. Berechnen Sie R^{v} als Mengenprodukt $A \times B$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Sigma = \{(,)\}$ ein Alphabet, bestehend aus einer öffnenden bzw. schließenden Klammer. Sei $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik mit Axiom S und den Produktionen

$$S \underset{P}{\rightarrow} \epsilon\,, \qquad S \underset{P}{\rightarrow} (S)\,, \qquad S \underset{P}{\rightarrow} SS\,.$$

1. Konstruieren Sie nach Lemma 12 der Vorlesung eine kontextfreie Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$, die $L(G)$ erzeugt.
2. Zeigen Sie, dass es für $z' = ()(())$ eine Ableitung von S in G' der Länge 10 gibt.
3. Weisen Sie nach, dass $w = ())($ nicht in $L(G')$ liegt, indem Sie nach Satz 20 für hinreichend großes m die Folge der Mengen T_m^4 der in m Schritten aus S ableitbaren Wörter w der Länge höchstens 4 in extensionaler Form bestimmen und die Aussage $w \notin T_m^4$ durch Rechnung entscheiden.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Nach Beispiel 16 der Vorlesung wird die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ von der Grammatik $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit folgenden Produktionen erzeugt.

$$
\begin{array}{rclcrcl}
S & \to & aSXY \mid abY\,, & & & & \\
YX & \to & XY\,, & & bX & \to & bb\,, \\
bY & \to & bc\,, & & cY & \to & cc\,.
\end{array}
$$

1. Geben Sie eine Ableitung für $a^2b^2c^2$ von S in G an.

2. Modifizieren Sie G so zu einer Grammatik G', dass G' die Sprache $L' = L \cup \{\epsilon\}$ erzeugt.

3. Konstruieren Sie eine kontexsensitive Grammatik G'' die L' erzeugt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ Grammatiken des gleichen Typs $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1. Geben Sie eine Grammatik G vom gleichen Typ wie G_1 an, so dass gilt
$$L(G) = L(G_1) \cup \{\epsilon\}.$$

2. Geben Sie eine Grammatik H vom gleichen Typ wie G_1 an, so dass gilt
$$L(H) = L(G_1) \cup L(G_2).$$

Zusatzaufgabe 2 (Wird nicht korrigiert.)

Um Klammerausdrücke zu zählen, beschränkt man sich auf Ausdrücke ohne Variable und einen einzigen Klammertyp von öffnenden und schließenden Klammern „(“ bzw. „)“. Man betrachtet also eine Menge $K \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern über der Zeichenmenge $\Sigma = \{(,)\}$, die mit folgenden Regeln erzeugt werden kann. Dabei bezeichne ε das leere Wort, und die Konkatenation von Wörtern wird durch Nebeneinanderschreiben notiert. K heißt Menge der korrekten Klammerausdrücke über Σ.

- $\varepsilon \in K$,
- $w \in K \implies (w) \in K$,
- $w_1, w_2 \in K \implies w_1 w_2 \in K$.

Wir nennen ein Wort $w \in \Sigma^*$ <u>semipositiv</u>, falls $|u|_(\geq |u|_)$ für alle Anfangsteilwörter u von w gilt. Wir setzen im Folgenden voraus, dass $w \in \Sigma^*$ genau dann ein korrekter Klammerausdruck ist, falls w semipositiv ist und $|w|_(= |w|_)$ gilt.

Die Anzahl von korrekten Klammerausdrücken mit $n \in \mathbb{N}_0$ öffnenden Klammern heißt Catalan-Zahl C_n. Beweisen Sie die folgende Aussage.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\,.$$

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Reguläre Ausdrücke stellen Elemente einer Mengenalgebra dar. Die Operationen der Mengenalgebra sind die Konkatenation, Vereinigung („|"), Sternbildung („*") und die Operationen $\emptyset$, ϵ, sowie eine endliche Anzahl von Konstanten, d.h. nullstelligen Operationen $a, b, \ldots$, die eineindeutig den Elementen eines Alphabets Σ entsprechen. Reguläre Ausdrücke sind also nichts anderes als algebraische Ausdrücke ohne Variable über einer Mengenalgebra. Studieren Sie die Definition des Begriffs des regulären Ausdrucks und beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Welche Mengen stellen die Ausdrücke $\emptyset$ bzw. ϵ bzw. a, b dar?
2. Geben sie einen regulären Ausdruck an, der eine Sprache A über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit den Eigenschaften $01 \in A$ und $A^*A = A$ darstellt.
3. Finden Sie einen regulären Ausdruck über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, der die Menge aller Wörter beschreibt, die mit 00 beginnen und in denen 1 genau dreimal vorkommt.

Vorbereitung 2

Reguläre Ausdrücke α, β heißen äquivalent, i.Z. $\alpha \equiv \beta$, genau dann, wenn $L(\alpha) = L(\beta)$ gilt.

Beweisen Sie für alle regulären Ausdrücke α und β: $(\alpha\beta)^*\alpha \equiv \alpha(\beta\alpha)^*$.

Vorbereitung 3

Wann genau ist die von einem endlichen Automat erzeugte Sprache endlich?
Beantworten Sie diese Frage anhand der Länge der Pfade, die es in dem Übergangsgraph eines Automaten gibt.

Vorbereitung 4

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Zu jedem ϵ-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ gibt es einen äquivalenten (ϵ-freien) NFA $N' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}', F')$, so dass $|Q'| \leq |Q|$ gilt.
2. Für jeden NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ gilt: Wenn $F = Q$, dann ist $L(N) = \Sigma^*$.
3. $a(ab)^*(ba)^*b \equiv a(ab|ba)^*b$.
4. Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist und $\Gamma \subseteq \Sigma$,
dann ist $L' = \{w \in L \mid w \text{ enthält nur Zeichen aus } \Gamma\}$ ebenfalls regulär.

Tutoraufgabe 1 (Myhill-Verfahren)

Wir betrachten einen nichtdeterministischen Automaten

$$N = (Q, \Sigma, \delta, S, F) = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \delta, \{s_0\}, \{s_1\})$$

mit $\delta(s_0, a) = \{s_1\}$ und $\delta(q, x) = \emptyset$ für $(q, x) \neq (s_0, a)$.

1. Konstruieren Sie mit dem Myhill-Verfahren einen endlichen deterministischen Automaten M, für den $L(M) = L(N)$ gilt.

2. Konstruieren Sie nach Vorlesungsmethodik eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M)$.

Tutoraufgabe 2 (Äquivalente Darstellungen regulärer Sprachen)

Wir betrachten den regulären Ausdruck $\alpha = (1(0|1)^*)|0$.

1. Konstruieren Sie mit dem Standardverfahren aus der Vorlesung einen ϵ-NFA A, so dass $L(\alpha) = L(A)$ gilt.
2. Wandeln Sie den erhaltenen Automat in einen äquivalenten NFA ohne ϵ-Übergänge.
3. Konstruieren Sie durch Anwendung des Potenzmengenverfahrens einen DFA, der die Sprache des Ausdrucks α akzeptiert.

Tutoraufgabe 3 (Zyklische Zustandsänderungen im DFA)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit einer Anzahl n von Zuständen. Zeigen Sie:

1. Sei $w = w_1 w_2 \dots w_{2n} \in \Sigma^*$ mit $|w_i| = 1$ ein Wort der Länge $2n$ und sei $q_0, q_1, \dots, q_{2n}$ die Folge der Zustände, die M ausgehend von q_0 bei Eingabe von w annimmt. Dann gibt es k, l mit $k < l$, so dass $q_k = q_l$.

2. Falls es ein Wort w der Länge $2n$ gibt mit $w \in L(M)$, dann gibt es unendlich viele Wörter, die der Automat M akzeptiert.

3. Finden Sie ein Verfahren, welches für einen gegebenen NFA M entscheidet, ob $|L(M)| \leq 100$ gilt.