Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 6
18. Mai 2015

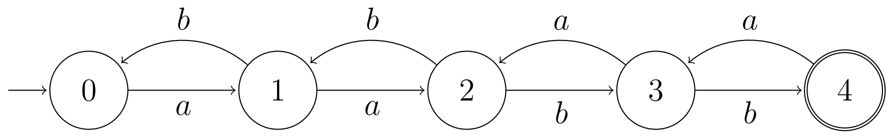
Theoretische Informatik

Abgabetermin: 1. Juni 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Vorbemerkung: Betrachten Sie die folgenden Haus- und Zusatzaufgaben insbesondere als Wiederholung, für die Sie zwei Wochen Zeit haben!

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Durch die folgende Grafik sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gegeben.



1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{2\}, b)$!
2. Zeigen Sie, dass die Sprache $L(\alpha)$ des regulären Ausdrucks $\alpha = aab(ab)^*b$ in der von A akzeptierten Sprache $L(A)$ enthalten ist, d. h. $L(\alpha) \subseteq L(A)$.
3. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen deterministischen endlichen Automaten B, der $L(A)$ akzeptiert.

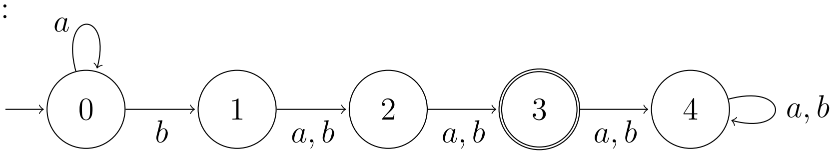
   Stellen Sie den erhaltenen Automaten B durch einen Übergangsgraphen dar.
4. Konstruieren Sie eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die $L(A)$ erzeugt.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}$ einen deterministischen endlichen Automaten (d. h. DFA) $A_k = (Q_k, \Sigma, \delta_k, 0, \{k\})$ mit $k{+}2$ Zuständen aus $Q_k = \{0, 1, \ldots, k, k{+}1\} \subset \mathbb{N}_0$. δ_k sei für alle Zustände q mit $1 \leq q \leq k$ und $x \in \Sigma$ definiert durch

$$\delta_k(0, a) = 0, \quad \delta_k(0, b) = 1, \quad \delta_k(q, x) = q + 1, \quad \delta_k(k + 1, x) = k + 1\,,$$

z. B. für $k = 3$:



1. Zeigen Sie für alle $k \geq 1$, dass der DFA A_k minimal ist für die Sprache $L(A_k)$.

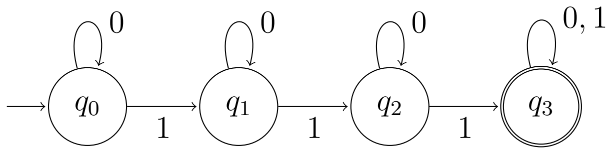
   Hinweis: Zustände i, j mit $i < j$ sind unterscheidbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(i, w)$ ein Endzustand ist und gleichzeitig $\hat{\delta}(j, w)$ kein Endzustand ist.

2. Wir betrachten die folgende Aussage: Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass die kanonischen (deterministischen) Minimalautomaten für L bzw. für die gespiegelte Sprache L^R nicht die gleiche Anzahl von Zuständen besitzen!

   Begründen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass diese Aussage wahr ist.

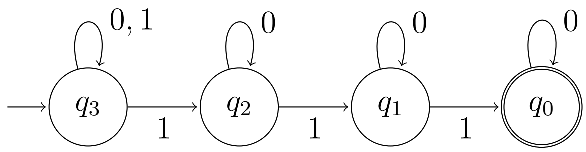
Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Der folgende Übergangsgraph definiert einen deterministischen endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_3\})$.



1. Beweisen Sie durch Anwendung eines Minimierungsalgorithmus, dass A minimal ist in dem Sinne, dass für <u>keine</u> zwei verschiedenen Zustände $p, q \in Q$ die Äquivalenzbeziehung $p \equiv_A q$ gilt.

2. Durch geeignete „Spiegelung“ gewinnt man aus A den NFA $A^R = (Q, \Sigma, \delta^R, \{q_3\}, \{q_0\})$ wie folgt:



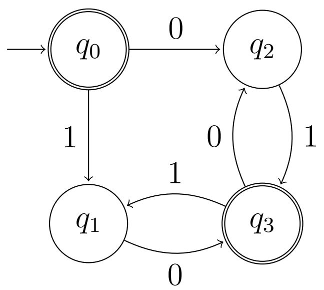
   Definieren Sie ein Verfahren zur Überprüfung der Gleichung $L(A) = L(A^R)$ und begründen Sie dessen Korrektheit.

   Beweisen Sie nun durch Anwendung Ihres Verfahrens die Gleichheit der Sprachen $L(A)$ und $L(A^R)$!

   Geben Sie einen regulären Ausdruck α für die Sprache $L(A)$ an, so dass also $L(\alpha) = L(A)$ gilt.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Ein endlicher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, \{0\}, F)$ sei durch folgende Grafik gegeben:



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, so dass $L(A) = L(\alpha)$ gilt. Geben Sie einen NFA mit 3 Zuständen an, der $L(A)$ akzeptiert.

2. Beweisen Sie durch Konstruktion des Myhill-Nerode-Automaten (Quotientenautomaten), dass ein minimaler DFA für die Sprache $L(A)$ 4 Zustände besitzt.

   Stellen Sie den konstruierten Automaten graphisch dar.

3. Zeigen Sie für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit Komplement $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$, dass der minimale Automat für L und der minimale Automat für $\overline{L}$ gleich viele Zustände besitzen.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lll} S \to AB \mid BX\,, & & \\ A \to BA \mid a\,, & B \to XX \mid b\,, & X \to AB \mid b\,. \end{array}$$

1. Beweisen Sie durch Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, dass $baabb \in L(G)$ gilt.

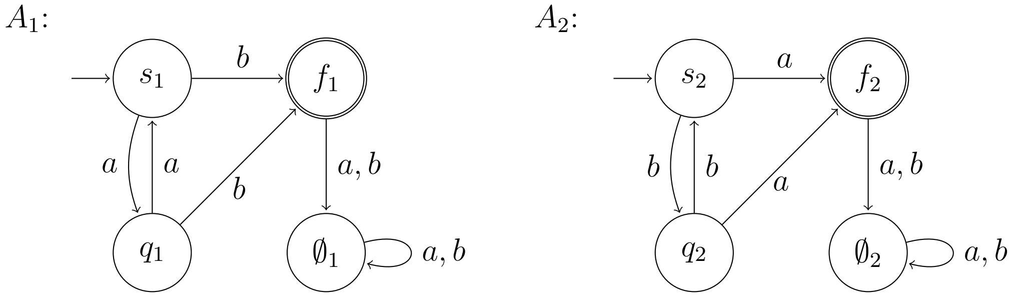
   Fertigen Sie dazu ein übersichtliches Protokoll an und lassen Sie genügend Platz für die Eintragung der jeweils relevanten Syntaxbäume von Ableitungen im Sinne von Teilaufgabe 2.

2. Berechnen Sie nun mit einer geeigneten Erweiterung des CYK-Algorithmus alle existierenden verschiedenen Syntaxbäume für Ableitungen des Wortes *baabb*!

   Stellen Sie alle Syntaxbäume für Ableitungen von *baabb* graphisch dar!

Hausaufgabe 6 (5 Punkte)

Wir betrachten die endlichen Automaten A_1 und A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die durch die folgenden Graphen gegeben sind:



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(A_1)$ an und zeigen Sie $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$.

2. Geben Sie einen zu A_1 äquivalenten, minimalen DFA B_1 an und beweisen Sie dessen Minimalität.

   Der Minimalitätsbeweis soll durch Anwendung eines entsprechenden Konstruktionverfahrens für Quotientenautomaten geliefert werden.

3. Seien $\Gamma = \Sigma \cup \{\#\}$ und $L = L(A_1)\{\#\}L(A_2)$. Geben Sie einen minimalen DFA C an, so dass $L = L(C)$ gilt.

4. Auf Γ^* ist eine Äquivalenzrelation $\equiv_L$ wie folgt definiert: Für alle $u, v \in \Gamma^*$ gilt

$$u \equiv_L v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall w \in \Gamma^*.\ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L\,.$$

   Man zeige: Falls $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$, dann gilt $u \not\equiv_L v$, d. h. u und v sind nicht äquivalent im Sinne von $\equiv_L$.

Hausaufgabe 7 (4 Punkte)

Widerlegen Sie die Regularität der folgenden Sprachen (mit Hilfe des Pumping-Lemmas):

1. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, w^R = w\}$

2. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, |w|_0 \geq |w|_1\}\,.$

Dabei bedeutet w^R die Umkehrung von w („Rückwärtslesen“), und $|w|_a$ gibt die Anzahl der Zeichen a in einem Wort w an, d.h. $|w|_a = \#_a(w)$.

Zusatzaufgabe 4 (wird nicht korrigiert)

Die Permutationssprache L_P zu einer Sprache L besteht aus allen Permutationen aller Wörter in L. Formal setzen wir:

$$L_P = \{u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(k)} \,;\, k \in \mathbb{N},\ \pi \text{ Permutation und } u_1 \cdots u_k \in L\}$$

1. Geben Sie eine alternative, möglichst einfache Beschreibung der Permutationssprache zu der Sprache $L = L((ab)^*)$ an.

2. Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um anhand dieser Sprache zu zeigen, dass reguläre Sprachen nicht abgeschlossen sind unter Permutation (d.h. für eine reguläre Sprache L ist L_P nicht zwangsläufig regulär).

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen. Insgesamt werden dadurch induktiv Mengen dargestellt bzw. erzeugt. Formal werden die erzeugten Mengen als Durchschnitt aller Mengen dargestellt, die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Tupel von Mengen $X_1, X_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende Regelsystem H mit drei Implikationen.

$$H: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow\ aa \in X_1\,, \\ (2) & x \in X_2 & \Longrightarrow\ xa \in X_1\,, \\ (3) & x \in X_1 & \Longrightarrow\ ax \in X_2\,. \end{array}$$

Das Tupel $X = (X_1, X_2)$ heißt H-abgeschlossen, falls die Implikationen (1), (2) und (3) gelten.

1. Seien I eine nicht leere Indexmenge und $Y = (Y_i)_{i \in I}$ eine Familie von H-abgeschlossenen Mengentupeln $Y_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2})$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt
$$\bigcap Y = \left(\bigcap_{i \in I} Y_{i,1},\, \bigcap_{i \in I} Y_{i,2} \right)\,.$$
ebenfalls H-abgeschlossen ist.
2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Tupel $A = (A_1, A_2)$ ein kleinstes H-abgeschlossenes Tupel A^H gibt, so dass $A \subseteq A^H$. Dabei sei die Mengeninklusion komponentenweise auf 2-Tupel erweitert. A^H heißt dann die H-abgeschlossene Hülle von A oder das von A erzeugte H-abgeschlossene Mengentupel.
3. Seien $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Beweisen Sie induktiv mit Hilfe der H-Abgeschlossenheit, dass alle Wörter in L_1 aus einer geraden Anzahl von Buchstaben a bestehen.
4. Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.
$$S \ \to\ aa \mid Ba\,, \qquad\qquad B \ \to\ aS\,.$$
Sei $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Zeigen Sie $L_G = L_1$.

Bemerkung: Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise.

Vorbereitung 2

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to aSb \mid SS \mid \epsilon\,, \qquad T \to TaTb \mid \epsilon\,.$$

Wir definieren $L(X) := \{w \in \Sigma^*\,;\, X \underset{G}{\to}^* w\}$ für $X \in V$. Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Vorbereitung 3

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{lllllllll} \delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}\,, & & & \\ \delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}\,. \end{array}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ', dass für den Kellerautomaten $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$ gilt: $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$.

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$. In Satz 72 der Vorlesung wird die Menge $V' = \{A \in V\,;\, (\exists w \in \Sigma^*)[A \underset{G}{\rightarrow}^* w]\}$ betrachtet. Die Variablen aus V' nennen wir erzeugend und eine Teilmenge $T \subseteq V$ nennen wir erzeugend abgeschlossen oder reduktiv abgeschlossen, falls gilt

(Regel e) $\quad (A \to \alpha) \in P, \quad \alpha \in (T \cup \Sigma)^* \quad \Longrightarrow \quad A \in T\,.$

1. Mit $\emptyset^e$ bezeichnen wir die erzeugend abgeschlossene Hülle der leeren Menge. Die Berechnung von $\emptyset^e$ erfordert Aufwand $O(|V| \cdot s(G))$. Begründung!
2. Sei G kontextfrei. Zeigen Sie, dass $V' = \emptyset^e$ gilt.
3. Diskutieren Sie die Frage, woran das nahegelegte Verfahren für die Entscheidung der Leerheit der Sprache $L(G)$ bei kontextsensitiven Grammatiken G i.A. scheitert.

Tutoraufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten die Sprache $L = \{w \in \Sigma^*\,;\, \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$ und die Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$S \;\rightarrow\; aSaSb \mid aSbSa \mid bSaSa \mid SS \mid \epsilon$$

1. Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$, d.h., dass die Grammatik G „korrekt" ist für die Sprache L.
2. Zeigen Sie, dass alle Wörter $w \in L$ in der Grammatik G ableitbar sind, d.h., dass die Grammatik G „vollständig" ist bezüglich der Sprache L.
3. G ist lediglich „nullierbar kontextfrei". Geben Sie nun eine kontextfreie Grammatik G' für die Sprache L an.

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Ogden, dass die folgende Sprache L nicht kontextfrei ist.

$$L = \{a^n b^n c^i\,;\, i, n \in \mathbb{N}, i \neq n\}$$

Tutoraufgabe 4

1. Konstruieren Sie für die folgende Sprache $L = \{a^n b^{4n}\ ;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ einen Kellerautomaten, der L durch Endzustände akzeptiert.
2. Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache $\{a^n b^n\ ;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ mit leerem Keller akzeptiert. Geben Sie die Konfigurationsfolge an, die der Automat durchläuft, wenn er das Wort $a^3 b^3$ liest.
3. Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAB\,, \\ A &\rightarrow Sa \mid Sb \mid a\,, \\ B &\rightarrow Bb \mid Sb \mid b\,. \end{aligned}$$

   Konstruieren Sie systematisch einen PDA K, der $L(G)$ durch leeren Keller akzeptiert.